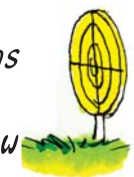
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

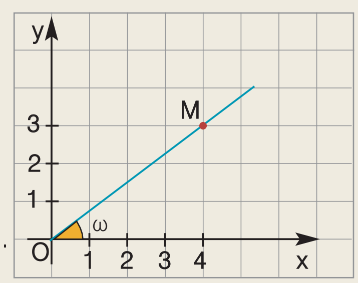
2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

- ✔ *Θυμάμαι πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.*
- ✔ *Γνωρίζω πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$.*
- ✔ *Μαθαίνω να υπολογίζω τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy φέραμε την ημιευθεία ΟΜ, που σχηματίζει με τον ημιάξονα Οx γωνία ω.



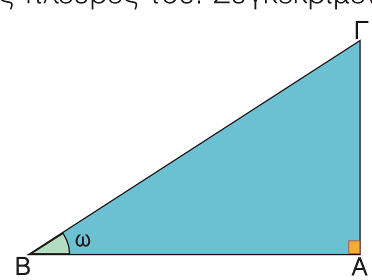
1. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Μ και να υπολογίσετε την απόσταση του Μ από την αρχή Ο.
2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου γνωρίζουμε τις πλευρές του. Συγκεκριμένα, μάθαμε ότι:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}$$

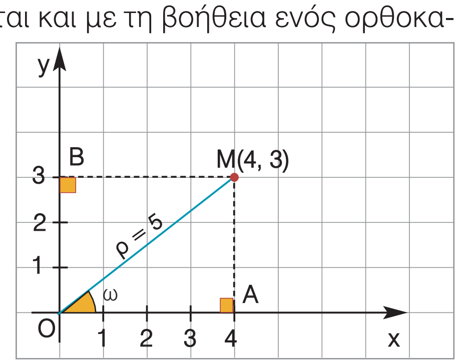


Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορίζονται και με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.

Αν σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy πάρουμε το σημείο Μ(4, 3) και φέρουμε ΜΑ ⊥ x′x και ΜΒ ⊥ y′y, τότε έχουμε ΟΑ = 4 και ΟΒ = ΑΜ = 3.

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega = x\widehat{O}M$ υπολογίζονται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο αυτό για την απόσταση ρ = ΟΜ έχουμε $\rho^2 = 4^2 + 3^2$, οπότε $\rho = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$. Άρα

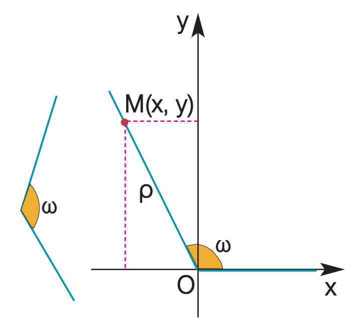


$$\eta\mu\omega = \frac{3}{5} = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5} = \frac{\text{τετμημένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4} = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{τετμημένη του Μ}}$$

Με τη βοήθεια όμως ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων μπορούμε να ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω και όταν αυτή δεν είναι οξεία.
Αν έχουμε μία αμβλεία γωνία ω, τότε την τοποθετούμε σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με την αρχή O, η μία πλευρά της να συμπέσει με τον θετικό ημιάξονα Ox και η άλλη της πλευρά να βρεθεί στο 2ο τεταρτημόριο. Αν στην πλευρά αυτή πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο M(x, y), διαφορετικό από το O, τότε για την απόσταση ρ = OM ισχύει



$$\boldsymbol{ρ = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω είναι:

$$ημω = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{y}{ρ}$$

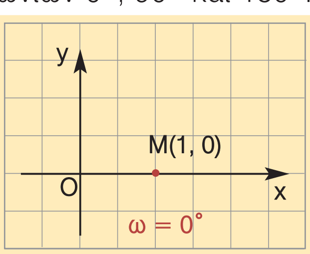
$$συνω = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{x}{ρ}$$

$$εφω = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}} = \frac{y}{x}$$

Παρατηρούμε ότι:

- **Αν η γωνία ω είναι οξεία**, τότε είναι $x>0$, $y>0$, $ρ>0$, οπότε: **ημω>0, συνω>0, εφω>0.**
- **Αν η γωνία ω είναι αμβλεία**, τότε είναι $x<0$, $y>0$, $ρ>0$, οπότε: **ημω>0, συνω<0, εφω<0.**

Οι προηγούμενοι τύποι γενικεύονται και όταν $ω = 0^\circ$ ή $ω = 90^\circ$ ή $ω = 180^\circ$.
Έτσι, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 0°, 90° και 180°.

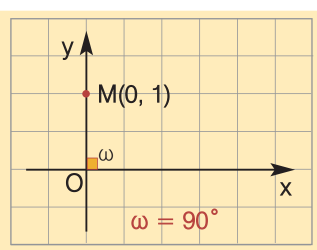


Αν M σημείο του ημιάξονα Ox
π.χ. το M(1,0), τότε $ω=x\hat{O}M=0^\circ$
και ρ=OM=1. Άρα:

$$ημ0^\circ = \frac{y}{ρ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$συν0^\circ = \frac{x}{ρ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$εφ0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

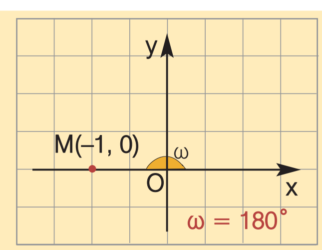


Αν M σημείο του ημιάξονα Oy
π.χ. το M(0,1), τότε $ω=x\hat{O}M=90^\circ$
και ρ=OM=1. Άρα:

$$ημ90^\circ = \frac{y}{ρ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$συν90^\circ = \frac{x}{ρ} = \frac{0}{1} = 0$$

εφ90° δεν ορίζεται
(γιατί x=0)



Αν M σημείο του ημιάξονα Ox′
π.χ. το M(–1,0), τότε $ω=x\hat{O}M=180^\circ$
και ρ=OM=1. Άρα:

$$ημ180^\circ = \frac{y}{ρ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$συν180^\circ = \frac{x}{ρ} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$εφ180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

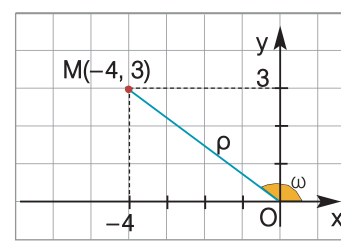
Υπενθυμίζουμε και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30˚, 45˚ και 60˚ που φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

ω	30˚	45˚	60˚
ημω	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνω	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφω	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy παίρνουμε το σημείο Μ(–4, 3). Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $ω = x\hat{O}M$.

Λύση

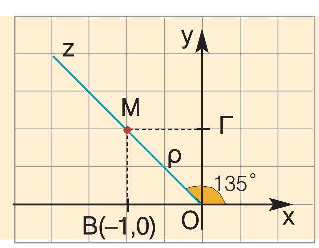


Για την απόσταση ΟΜ = ρ έχουμε:
$ρ = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

Άρα: $ημω = \frac{y}{ρ} = \frac{3}{5}$, $συνω = \frac{x}{ρ} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$

και $εφω = \frac{y}{x} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$.

2 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy φέρουμε ημιευθεία Oz, ώστε $x\hat{O}z = 135˚$. Πάνω στην Oz παίρνουμε το σημείο Μ με τετμημένη –1. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $x\hat{O}M = 135˚$.



Λύση

Φέρνουμε $MB \perp x'x$ και $MΓ \perp y'y$. Επειδή $x\hat{O}M = 135˚$ και $x\hat{O}y = 90˚$ θα είναι $Γ\hat{O}M = 45˚$, οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΓ είναι και ισοσκελές.
Άρα ΟΓ = ΜΓ = ΟΒ = 1 και η τεταγμένη του σημείου Μ είναι y = 1.
Δηλαδή έχουμε Μ(–1, 1) και $ρ = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Άρα $ημ135˚ = \frac{y}{ρ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $συν135˚ = \frac{x}{ρ} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $εφ135˚ = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Για το σημείο Μ(5, 12) είναι ρ = ΟΜ = 13. Αν $ω = x\hat{O}M$ να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:
ημω = ...   συνω = ...   εφω = ...

2 Αν η γωνία $\omega = x\hat{O}M$ είναι αμβλεία, τότε να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά με το σύμβολο $>$ ή $<$.

ημω ... 0 συν ... 0 εφω ... 0

3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. ημ90°	1. 0
β. συν180°	2. –1
γ. εφ0°	3. 1
δ. συν90°	
ε. ημ0°	
στ. εφ180°	
ζ. συν0°	
η. ημ180°	

α	β	γ	δ	ε	στ	ζ	η

4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Για κάθε γωνία ω ισχύει $-1 \leq$ συνω ≤ 1. ☐

β) Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε εφω < 0. ☐

γ) Αν για τη γωνία ω ισχύει ημω > 0, τότε η ω είναι οξεία. ☐

δ) Το ημίτονο οποιασδήποτε γωνίας τριγώνου είναι θετικός αριθμός. ☐

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$, όταν:

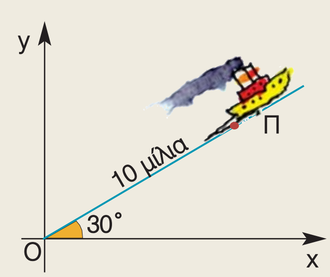
α) M(3, 4) β) M(–5, 12) γ) M(0, 3)

2 Μια ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -2x$.

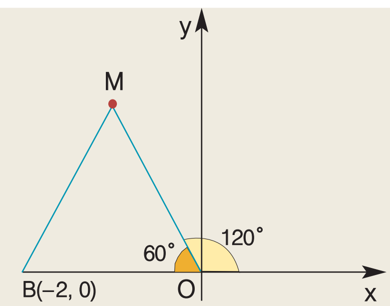
α) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε και να προσδιορίσετε την τεταγμένη ενός σημείου της Μ που έχει τετμημένη –1.

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$.

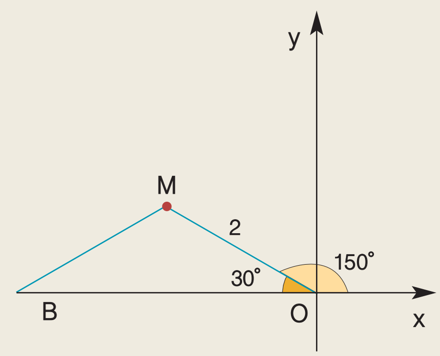
3 Ένα πλοίο Π αναχώρησε από το λιμάνι Ο και κινήθηκε βορειοανατολικά προς μία κατεύθυνση που σχηματίζε με τον άξονα Οx γωνία 30°. Να βρείτε τις συντεταγμένες του πλοίου μετά από διαδρομή 10 μιλίων.



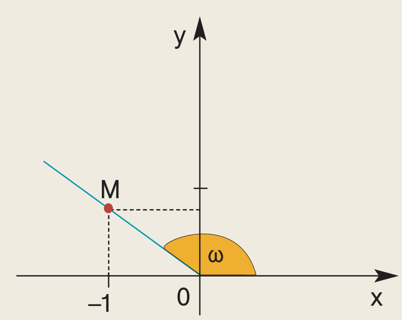
4 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΟΒΜ είναι ισόπλευρο.
Να υπολογίσετε:
α) τις συντεταγμένες του Μ.
β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 120˚.



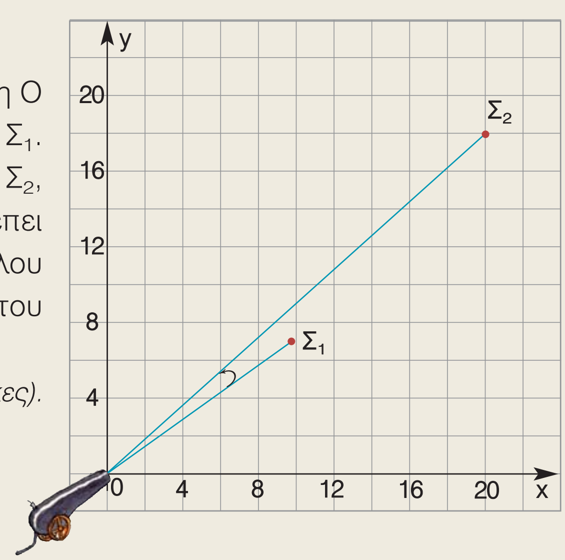
5 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΟΒΜ είναι ισοσκελές.
α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του Μ είναι $(-\sqrt{3}, 1)$.
β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 150˚.



6 Στο διπλανό σχήμα είναι εφω $= -\frac{3}{4}$. Αν η τετμημένη του σημείου Μ είναι –1, τότε να υπολογίσετε:
α) την τεταγμένη του σημείου Μ.
β) το ημω και το συνω.



7 Ένα πυροβόλο όπλο βρίσκεται στη θέση Ο και έχει στρέψει την κάννη στο στόχο $Σ_1$. Αν ο στόχος $Σ_1$ μετακινηθεί στη θέση $Σ_2$, τότε να υπολογίσετε πόσες μοίρες πρέπει να στραφεί η κάννη του πυροβόλου όπλου για να σημαδεύει το στόχο στη νέα του θέση;
(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).

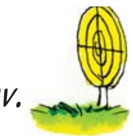


2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

Γνωρίζω ποια σχέση συνδέει:

✔ *Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς παραπληρωματικών γωνιών.*

✔ *Τις γωνίες που έχουν το ίδιο ημίτονο.*

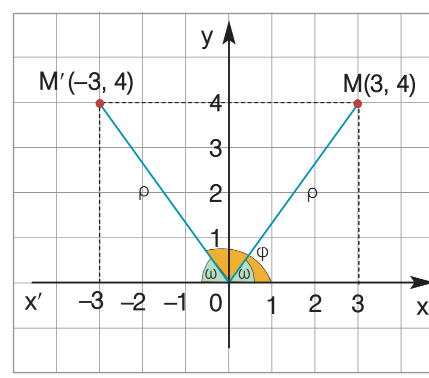


ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy να πάρετε το σημείο Μ(3, 4).

1. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Μ′, που είναι συμμετρικό του Μ ως προς τον άξονα y′y;
2. Να εξηγήσετε γιατί οι γωνίες $x\hat{O}M = ω$ και $x\hat{O}M' = φ$ είναι παραπληρωματικές.
3. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ και τη σχέση που τους συνδέει.

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy παίρνουμε το σημείο Μ(3, 4) και βρίσκουμε το συμμετρικό του σημείο Μ′(–3, 4) ως προς τον άξονα y′y.



Αν ονομάσουμε ω τη γωνία $x\hat{O}M$, τότε λόγω συμμετρίας είναι $x'\hat{O}M' = ω$, οπότε για τη γωνία $φ = x\hat{O}M'$ ισχύει $φ = 180^\circ - ω$, που σημαίνει ότι οι γωνίες ω και φ είναι παραπληρωματικές, αφού $ω + φ = 180^\circ$.

Έχουμε ακόμη ότι

$ρ = OM = OM' = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, οπότε:

$$ημω = \frac{4}{5}, \quad συνω = \frac{3}{5}, \quad εφω = \frac{4}{3} \quad \text{και}$$

$$ημφ = \frac{4}{5}, \quad συνφ = -\frac{3}{5}, \quad εφφ = -\frac{4}{3}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι:

Οι παραπληρωματικές γωνίες ω, φ = 180°– ω έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Γενικά

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και 180° – ω ισχύουν:

- $ημ(180^\circ - ω) = ημω$
- $συν(180^\circ - ω) = -συνω$
- $εφ(180^\circ - ω) = -εφω$

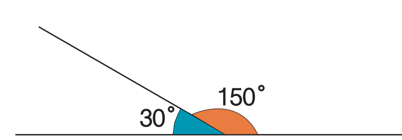
Με τους προηγούμενους τύπους μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας, αν γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της παραπληρωματικής της.

Για παράδειγμα,

$$ημ150^\circ = ημ(180^\circ - 30^\circ) = ημ30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$συν150^\circ = συν(180^\circ - 30^\circ) = -συν30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$εφ150^\circ = εφ(180^\circ - 30^\circ) = -εφ30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



Στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι οι παραπληρωματικές γωνίες 150° και 30°, αν και δεν είναι ίσες, έχουν το ίδιο ημίτονο. Επομένως:

Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και είναι από 0° μέχρι και 180°, τότε είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Για παράδειγμα, αν $ημx = ημ35^\circ$ και $0 \leq x \leq 180^\circ$, τότε είναι $x = 35^\circ$ ή $x = 180^\circ - 35^\circ$, δηλαδή $x = 35^\circ$ ή $x = 145^\circ$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $Α = ημ140^\circ + συν170^\circ - ημ40^\circ + συν10^\circ$.

Λύση

Οι γωνίες 140° και 40° είναι παραπληρωματικές, οπότε θα έχουν το ίδιο ημίτονο, δηλαδή είναι $ημ140^\circ = ημ40^\circ$.

Οι γωνίες 170° και 10° είναι παραπληρωματικές, οπότε θα έχουν αντίθετα συνημίτονα, δηλαδή είναι $συν170^\circ = -συν10^\circ$. Άρα:

$Α = ημ140^\circ + συν170^\circ - ημ40^\circ + συν10^\circ = ημ40^\circ - συν10^\circ - ημ40^\circ + συν10^\circ = 0$.

2 Αν $\hat{Α}$, $\hat{Β}$, $\hat{Γ}$ είναι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{Α} = 80^\circ$ και $\hat{Β} = 70^\circ$ να αποδειχθεί ότι: α) $ημ(Α + Β) = ημΓ$ β) $συν(Α + Β) = -συνΓ$

Λύση

Οι γωνίες $\hat{Α}$, $\hat{Β}$, $\hat{Γ}$ του τριγώνου έχουν άθροισμα 180°, δηλαδή είναι:

$80^\circ + 70^\circ + \hat{Γ} = 180^\circ$, οπότε $\hat{Γ} = 30^\circ$. Άρα:

α) $ημ(Α + Β) = ημ(80^\circ + 70^\circ) = ημ150^\circ = ημ(180^\circ - 30^\circ) = ημ30^\circ = ημΓ$.

β) $συν(Α + Β) = συν(80^\circ + 70^\circ) = συν150^\circ = συν(180^\circ - 30^\circ) = -συν30^\circ = -συνΓ$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) $ημ150^\circ = ημ30^\circ$	☐	β) $συν135^\circ = συν45^\circ$	☐
γ) $εφ100^\circ = εφ80^\circ$	☐	δ) $εφ75^\circ = -εφ105^\circ$	☐
ε) $συν110^\circ = -συν70^\circ$	☐	στ) $ημ140^\circ = -ημ40^\circ$	☐

2 Αν για τη γωνία x ισχύει $0 \leq x \leq 180^\circ$, να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $ημx = ημ60^\circ$, τότε $x =$ ....

β) Αν $συνx = -συν20^\circ$, τότε $x =$ ....

γ) Αν $εφx = -εφ30^\circ$, τότε $x =$ ....

3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του τριγωνομετρικό αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. ημ140°	1. ημ40°
	2. συν40°
β. συν140°	3. εφ40°
	4. –ημ40°
γ. εφ140°	5. –συν40°
	6. –εφ40°

α	β	γ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:
α) 120° β) 135° γ) 150°

2 Να αποδείξετε ότι:
α) $ημ108^\circ + συν77^\circ - ημ72^\circ + συν103^\circ = 0$
β) $εφ122^\circ - εφ58^\circ \cdot εφ135^\circ = 0$

3 Να αποδείξετε ότι:
α) $συν^2 45^\circ + συν^2 135^\circ = 1$ β) $ημ^2 30^\circ + ημ^2 60^\circ + ημ^2 120^\circ + ημ^2 150^\circ = 2$

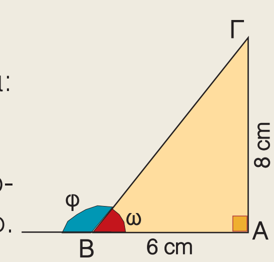
4 Να αποδείξετε ότι: $ημ(140^\circ + x) = ημ(40^\circ - x)$ και $συν(158^\circ - x) = -συν(22^\circ + x)$.

5 Να βρείτε τη γωνία x, όταν:
α) $ημx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ β) $ημx = 1 - ημx$ γ) $συνx = \frac{\sqrt{3}}{2}$
δ) $συνx = -\frac{1}{2}$ ε) $εφx = -\sqrt{3}$ στ) $2εφx = 1 + εφx$

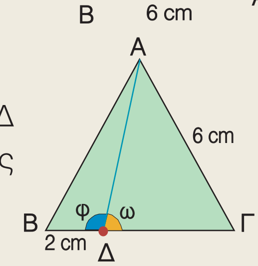
6 Να αποδείξετε ότι οι γωνίες ενός παραλληλογράμμου έχουν το ίδιο ημίτονο. Ισχύει το ίδιο και για τα συνημίτονα των γωνιών του;

7 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Να αποδείξετε ότι:
α) $ημΑ + συνΑ - ημΓ + συνΓ = 0$ β) $εφΑ + εφΓ = 0$

8 Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ.



9 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 6 cm και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε ΒΔ = 2 cm. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ.



2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

- ✔ *Γνωρίζω ποιες είναι οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες και μαθαίνω πώς αποδεικνύονται.*
- ✔ *Χρησιμοποιώ τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες για την απόδειξη άλλων απλών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να πάρετε ένα σημείο Μ στο 1ο ή στο 2ο τεταρτημόριο με όποιες συντεταγμένες θέλετε.

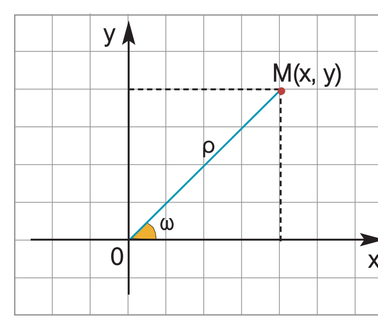
1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$.

2. Να υπολογίσετε την παράσταση $(\eta\mu\omega)^2 + (\sigma\upsilon\nu\omega)^2$ και να συγκρίνετε το αποτέλεσμα που βρήκατε με τα αποτελέσματα που βρήκαν οι συμμαθητές σας.

3. Να υπολογίσετε το λόγο $\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και να τον συγκρίνετε με την εφω.

Σε προηγούμενη ενότητα μάθαμε ότι για την απόσταση ρ ενός σημείου Μ(x, y) από την αρχή των αξόνων ισχύει

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ή } \rho^2 = x^2 + y^2.$$



Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το ρ^2, τότε έχουμε:

$$\frac{\rho^2}{\rho^2} = \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} \text{ ή } \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = 1 \quad (1).$$

Επειδή $\eta\mu\omega = \dfrac{y}{\rho}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{x}{\rho}$, η ισότητα *(1)* γίνεται

$$(\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\eta\mu\omega)^2 = 1 \text{ ή συντομότερα } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει

$$\boxed{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1}$$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες $\eta\mu\omega = \dfrac{y}{\rho}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{x}{\rho}$, με την προϋπόθεση ότι $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$, έχουμε:

$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} \text{ ή } \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{y\rho}{x\rho} \text{ ή } \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\omega$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για οποιαδήποτε γωνία ω με $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ ισχύει

$$\boxed{\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}$$

Οι προηγούμενες ισότητες λέγονται **βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες**, γιατί με τη βοήθειά τους αποδεικνύουμε και άλλες ταυτότητες που περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $ημω = \frac{3}{5}$, τότε να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.

Λύση

Από την ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ έχουμε

$συν^2ω = 1 - ημ^2ω$ ή $συν^2ω = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$συν^2ω = 1 - \frac{9}{25}$ ή $συν^2ω = \frac{16}{25}$ ή $συνω = \pm\frac{4}{5}$.

Επειδή η γωνία ω είναι αμβλεία έχουμε $συνω < 0$, οπότε $συνω = -\frac{4}{5}$.

Από την ταυτότητα $εφω = \frac{ημω}{συνω}$ έχουμε $εφω = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}$, οπότε $εφω = -\frac{3}{4}$.

2 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $εφω = 2$, τότε να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.

Λύση

Έχουμε $εφω = 2$ δηλαδή $\frac{ημω}{συνω} = 2$, οπότε $ημω = 2συνω$ *(1)*.

Αν στην ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ αντικαταστήσουμε το ημω με το 2συνω έχουμε

$(2συνω)^2 + συν^2ω = 1$ ή $4συν^2ω + συν^2ω = 1$ ή $5συν^2ω = 1$ ή $συν^2ω = \frac{1}{5}$,

άρα $συνω = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ ή $συνω = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Επειδή η γωνία ω είναι οξεία έχουμε $συνω > 0$, οπότε $συνω = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Από την ισότητα *(1)* έχουμε $ημω = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}$ ή $ημω = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3 Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

α) $(ημx - συνx)^2 + 2ημxσυνx = 1$ β) $1 + εφ^2ω = \frac{1}{συν^2ω}$

Λύση

α) Έχουμε

$(ημx - συνx)^2 + 2ημxσυνx = ημ^2x - 2ημxσυνx + συν^2x + 2ημxσυνx = ημ^2x + συν^2x = 1$

β) Έχουμε

$1 + εφ^2ω = 1 + \left(\frac{ημω}{συνω}\right)^2 = 1 + \frac{ημ^2ω}{συν^2ω} = \frac{συν^2ω + ημ^2ω}{συν^2ω} = \frac{1}{συν^2ω}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν $ημ^2ω = \frac{3}{5}$, τότε $συν^2ω = \frac{2}{5}$.

β) Αν συνω = 0, τότε δεν ορίζεται η εφω.

γ) Για κάθε γωνία ω ισχύει $ημ^2ω = συν^2ω - 1$.

δ) Αν $ημω = \frac{5}{13}$ και $συνω = \frac{12}{13}$, τότε $εφω = \frac{5}{12}$

2 Ο Στέφανος ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε ημω = 0 και συνω = 0. Έχει δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν ημω = 1, τότε συνω = ...

β) Αν ημω = 0, τότε συνω = ...

4 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Αν $ημω = \frac{3}{5}$, τότε το συνω είναι ίσο με:

α) $\frac{2}{5}$ β) $\frac{4}{5}$ γ) $\frac{2}{5}$ ή $-\frac{2}{5}$ δ) $\frac{4}{5}$ ή $-\frac{4}{5}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $ημω = \frac{5}{13}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

2 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $συνω = -\frac{1}{3}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

3 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $εφω = \frac{3}{4}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

4 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $ημω = \frac{4}{5}$, τότε να υπολογίσετε την παράσταση:

$$Α = \frac{1}{3}ημω + \frac{2}{3}συνω - \frac{1}{10}εφω.$$

5 Να αποδείξετε ότι:

α) $ημ^3ω + ημωσυν^2ω = ημω$ β) $συν^2ω – συν^4ω = ημ^2ωσυν^2ω$

6 Αν είναι $x = 3συνω$ και $y = 3ημω$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $xσυνω + yημω = 3$ β) $x^2 + y^2 = 9$

7 Να αποδείξετε ότι:

α) $συν^2α – ημ^2α = 2συν^2α – 1$ β) $ημ^2ασυν^2β + ημ^2αημ^2β + συν^2α = 1$

8 Να αποδείξετε ότι:

α) $(ημω + συνω)^2 + (ημω – συνω)^2 = 2$

β) $(αημω + βσυνω)^2 + (βημω – ασυνω)^2 = α^2 + β^2$

9 Να αποδείξετε ότι:

α) $συν^2x\, εφ^2x + συν^2x = 1$ β) $\dfrac{ημx + συνx}{1 + εφx} = συνx$

10 Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{συν^2x}{1 + ημx} = 1 – ημx$ β) $εφx + \dfrac{συνx}{1 + ημx} = \dfrac{1}{συνx}$

11 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $ημ50°ημ130° – συν50°συν130°$

β) $ημ^2 14° + ημ^2 114° + συν^2 166° + συν^2 66°$

12 Να αποδείξετε ότι:

α) $εφ70°συν70° – εφ110°συν110° = 0$

β) $εφ^2 40°συν^2 40° + συν^2 140° = 1$

13 Αν είναι $α = 30°$ και $β = 60°$, τότε να αποδείξετε ότι:

$ημ^2x\, ημα\, ημβ + συν^2x\, συνα\, συνβ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΑΙΝΙΓΜΑ

14 Είναι γωνία, όχι οξεία,

ημίτονο έχει τον αριθμό $\dfrac{λ + 1}{λ + 2}$ και

συνημίτονο έχει τον αριθμό $\dfrac{λ}{λ + 2}$.

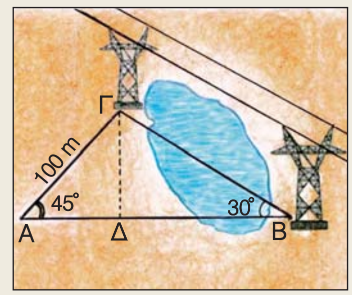
Ποια γωνία είναι;

2.4 Νόμος των ημιτόνων – Νόμος των συνημιτόνων

✔ *Γνωρίζω τους νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων και μαθαίνω να τους εφαρμόζω στη λύση προβλημάτων.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας τοπογράφος δεν μπορεί να μετρήσει την απόσταση ΓΒ δύο πυλώνων της ΔΕΗ, γιατί ανάμεσά τους παρεμβάλλεται μια λίμνη. Γι' αυτό επιλέγει μια θέση Α που απέχει 100 m από τον πυλώνα Γ και από την οποία φαίνονται και οι δύο πυλώνες. Με ένα γωνιόμετρο μετράει τις γωνίες $\hat{A} = 45^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$.



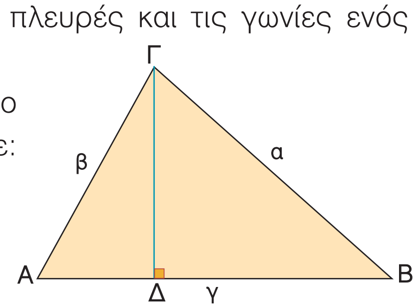
1. Μπορείτε να υπολογίσετε την απόσταση ΓΒ, αφού προηγουμένως υπολογίσετε το ύψος ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ; Ο τοπογράφος όμως υπολόγισε την απόσταση ΓΒ πιο γρήγορα, γιατί γνώριζε ότι οι λόγοι $\frac{ΓΒ}{ημ45^\circ}$ και $\frac{ΓΑ}{ημ30^\circ}$ είναι ίσοι.

2. Με τους υπολογισμούς που εσείς κάνατε, μπορείτε να διαπιστώσετε αν πράγματι οι λόγοι αυτοί είναι ίσοι;

Α Νόμος των ημιτόνων

Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε να υπολογίζουμε τις πλευρές και τις γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου, όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές του ή μια πλευρά και μια οξεία γωνία του. Πώς όμως μπορούμε να υπολογίσουμε τις πλευρές και τις γωνίες ενός τριγώνου όταν δεν είναι ορθογώνιο;

Σχεδιάζουμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε το ύψος ΓΔ. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΔΒ έχουμε:



$ημΑ = \frac{ΓΔ}{β}$ ή $ΓΔ = βημΑ$ *(1)*

$ημΒ = \frac{ΓΔ}{α}$ ή $ΓΔ = αημΒ$ *(2)*

Από τις ισότητες *(1)*, *(2)* έχουμε $βημΑ = αημΒ$ ή $\frac{α}{ημΑ} = \frac{β}{ημΒ}$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\frac{β}{ημΒ} = \frac{γ}{ημΓ}$.

Αποδείξαμε λοιπόν, ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ισχύει:

$$\boxed{\frac{α}{ημΑ} = \frac{β}{ημΒ} = \frac{γ}{ημΓ}}$$

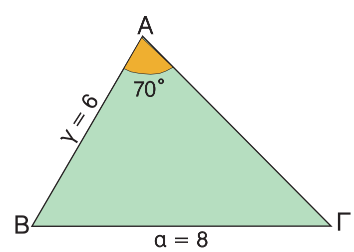
Η προηγούμενη σχέση αποδεικνύεται ότι ισχύει και όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο ή ορθογώνιο και ονομάζεται **νόμος των ημιτόνων**.

Γενικά

Οι πλευρές κάθε τριγώνου είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του.

Με το νόμο των ημιτόνων, αν γνωρίζουμε μια πλευρά ενός τριγώνου, την απέναντι γωνία της και μια άλλη πλευρά ή γωνία του, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα πρωτεύοντα στοιχεία του (πλευρές – γωνίες).

Για παράδειγμα, στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος μπορούμε με το νόμο των ημιτόνων να υπολογίσουμε τη γωνία $\widehat{Γ}$, αφού



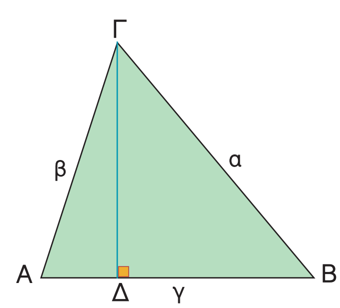
$$\frac{α}{ημΑ} = \frac{γ}{ημΓ} \text{ ή } \frac{8}{ημ70^\circ} = \frac{6}{ημΓ} \text{ ή } 8ημΓ = 6ημ70^\circ \text{ ή}$$

$$ημΓ = \frac{6ημ70^\circ}{8} \text{ ή } ημΓ = \frac{6 \cdot 0{,}94}{8} \text{ ή } ημΓ = 0{,}705.$$

Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες διαπιστώνουμε ότι $\widehat{Γ} = 45^\circ$.

Β Νόμος των συνημιτόνων

Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αν γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του ή δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους, τότε με το νόμο των ημιτόνων δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία του τριγώνου, αφού δε γνωρίζουμε μια πλευρά και την απέναντι γωνία της.



Αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο και φέρουμε το ύψος ΓΔ, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε: $α^2 = ΔΓ^2 + ΔΒ^2$ *(1)*.

Επειδή $ΔΒ = γ - ΑΔ$, η ισότητα *(1)* γράφεται:

$α^2 = ΔΓ^2 + (γ - ΑΔ)^2$ ή $α^2 = ΔΓ^2 + γ^2 + ΑΔ^2 - 2γ \cdot ΑΔ$ *(2)*.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$ΔΓ^2 + ΑΔ^2 = β^2$ και $συνΑ = \frac{ΑΔ}{β}$ ή $ΑΔ = βσυνΑ$.

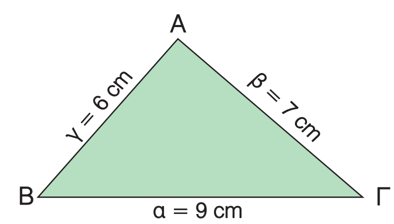
Άρα η ισότητα *(2)* γράφεται: $\boxed{α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυνΑ}$

Η προηγούμενη σχέση αποδεικνύεται ότι ισχύει και όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο ή ορθογώνιο και ονομάζεται **νόμος των συνημιτόνων**.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν

$$\boxed{\begin{aligned} β^2 &= γ^2 + α^2 - 2γασυνΒ \\ γ^2 &= α^2 + β^2 - 2αβσυνΓ \end{aligned}}$$

Με το νόμο των συνημιτόνων, αν σ' ένα τρίγωνο γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του ή δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα πρωτεύοντα στοιχεία του.



Για παράδειγμα, αν στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $α = 9$ cm, $β = 7$ cm και $γ = 6$ cm, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις γωνίες του.

Π.χ. για να υπολογίσουμε τη γωνία $\widehat{Β}$ έχουμε:

$β^2 = γ^2 + α^2 - 2γα συνΒ$ ή

$7^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot συνΒ$ ή

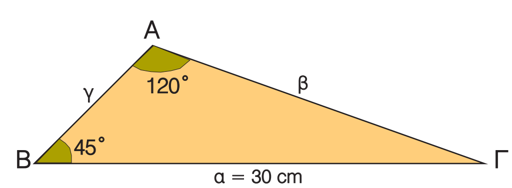
$49 = 36 + 81 - 108 \cdot συνΒ$ ή $108\, συνΒ = 68$ ή

$συνΒ = \dfrac{68}{108} = 0{,}629$. Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες διαπιστώνουμε ότι $\widehat{Β} = 51^\circ$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{Α} = 120^\circ$, $\widehat{Β} = 45^\circ$ και $α = 30$ cm. Να υπολογιστεί η γωνία $\widehat{Γ}$ και η πλευρά β.**

Λύση



Από τη σχέση $\widehat{Α} + \widehat{Β} + \widehat{Γ} = 180^\circ$ έχουμε

$120^\circ + 45^\circ + \widehat{Γ} = 180^\circ$ ή

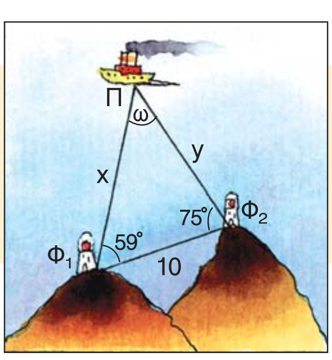
$\widehat{Γ} = 180^\circ - 165^\circ$ ή $\widehat{Γ} = 15^\circ$.

Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε

$\dfrac{α}{ημΑ} = \dfrac{β}{ημΒ}$ ή $\dfrac{30}{ημ120^\circ} = \dfrac{β}{ημ45^\circ}$ ή $β \cdot ημ120^\circ = 30 \cdot ημ45^\circ$ *(1)*.

Επειδή $ημ120^\circ = ημ(180^\circ - 60^\circ) = ημ60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $ημ45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ η ισότητα *(1)* γράφεται:

$β \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 30 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ή $β = \dfrac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ή $β = \dfrac{30\sqrt{6}}{3}$ ή $β = 10\sqrt{6}$ cm.



2 **Δύο φάροι $Φ_1$, $Φ_2$ απέχουν μεταξύ τους 10 μίλια. Ένα πλοίο Π βρίσκεται σε μια θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστούν οι αποστάσεις x, y του πλοίου από κάθε φάρο.**

Λύση

Στο τρίγωνο $ΠΦ_1Φ_2$ έχουμε $ω + 59^\circ + 75^\circ = 180^\circ$, οπότε $ω = 46^\circ$. Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε

$\dfrac{10}{ημ46^\circ} = \dfrac{x}{ημ75^\circ} = \dfrac{y}{ημ59^\circ}$.

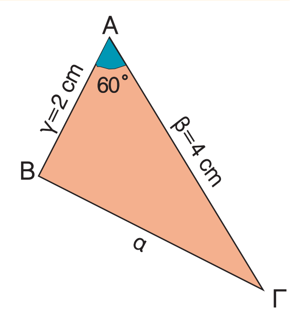
Από την ισότητα $\dfrac{10}{\eta\mu 46^\circ}=\dfrac{x}{\eta\mu 75^\circ}$ έχουμε $x=\dfrac{10\cdot\eta\mu 75^\circ}{\eta\mu 46^\circ}$ ή $x=\dfrac{10\cdot 0{,}966}{0{,}719}=13{,}44$ μίλια.

Από την ισότητα $\dfrac{10}{\eta\mu 46^\circ}=\dfrac{y}{\eta\mu 59^\circ}$ έχουμε $y=\dfrac{10\cdot\eta\mu 59^\circ}{\eta\mu 46^\circ}$ ή $y=\dfrac{10\cdot 0{,}857}{0{,}719}=11{,}92$ μίλια.

Επομένως το πλοίο Π απέχει από το φάρο Φ_1 13,44 μίλια και από το φάρο Φ_2 11,92 μίλια.

3 **Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A}=60^\circ$, $\beta=4$ cm και $\gamma=2$ cm. Να υπολογιστεί η πλευρά α και οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$.**

Λύση



Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ ή $\alpha^2=4^2+2^2-2\cdot 4\cdot 2\cdot\sigma\upsilon\nu 60^\circ$

ή $\alpha^2=16+4-16\cdot\dfrac{1}{2}$ ή $\alpha^2=12$.

Άρα $\alpha=\sqrt{12}$ δηλαδή $\alpha=2\sqrt{3}$ cm.

Ομοίως έχουμε:

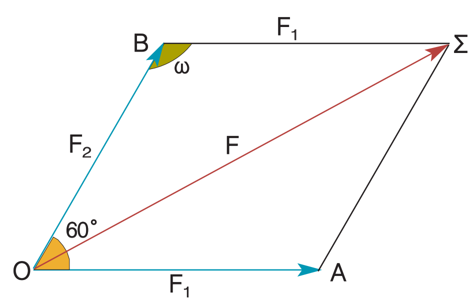
$\beta^2=\gamma^2+\alpha^2-2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B$ ή $4^2=2^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\cdot\sigma\upsilon\nu B$ ή

$16=4+12-8\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu B$ ή $8\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu B=0$ ή $\sigma\upsilon\nu B=0$, οπότε $\hat{B}=90^\circ$.

Αφού $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$ και $\hat{A}=60^\circ$, $\hat{B}=90^\circ$, έχουμε $\hat{\Gamma}=30^\circ$.

4 **Δύο δυνάμεις $F_1=4$ N και $F_2=3$ N εφαρμόζονται σ' ένα υλικό σημείο Ο και σχηματίζουν γωνία $\omega=60^\circ$. Να υπολογιστεί η συνισταμένη τους F.**

Λύση



Η συνισταμένη F των δυνάμεων F_1, F_2, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου ΟΑΣΒ. Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΒΣ και επειδή $B\Sigma=F_1$, έχουμε:

$F^2=F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\sigma\upsilon\nu\omega$ *(1)*.

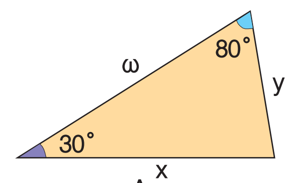
Οι γωνίες όμως ω και 60° είναι παραπληρωματικές, οπότε $\sigma\upsilon\nu\omega=-\sigma\upsilon\nu 60^\circ$ και ο τύπος *(1)* γράφεται:

$F^2=F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\sigma\upsilon\nu 60^\circ$ ή $F^2=4^2+3^2+2\cdot 4\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2}$ ή $F^2=37$, οπότε

$F=\sqrt{37}$ N ή $F=6{,}08$ N.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

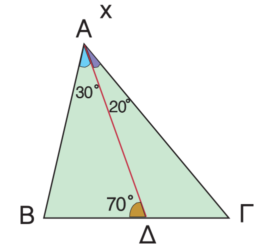
1 Να γράψετε το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος ____ = ____ = ____



2 Να γράψετε το νόμο των ημιτόνων:

α) στο τρίγωνο ΑΒΔ ____ = ____ = ____

β) στο τρίγωνο ΑΔΓ ____ = ____ = ____



3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει αημΒ = βημΑ. ☐

β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = 100^\circ$, τότε $\dfrac{\beta}{\eta\mu 100^\circ} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu 20^\circ}$. ☐

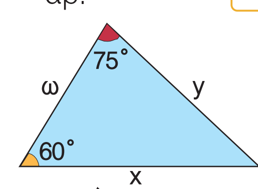
γ) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$. ☐

δ) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 70^\circ$, $\hat{\Gamma} = 80^\circ$, τότε ισχύει $\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu 80^\circ$. ☐

ε) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma} = 60^\circ$, τότε ισχύει $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$. ☐

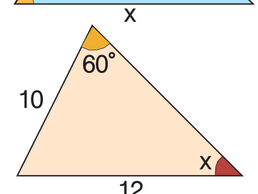
4 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων:

x^2 = ... y^2 = ... ω^2 = ...

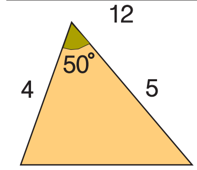


5 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις

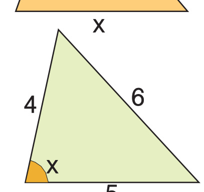
α) Η γωνία x υπολογίζεται με το νόμο των .... από την ισότητα ....



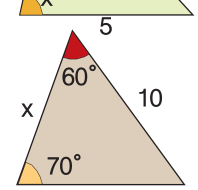
β) Η πλευρά x υπολογίζεται με το νόμο των .... από την ισότητα ....



γ) Η γωνία x υπολογίζεται με το νόμο των .... από την ισότητα ....



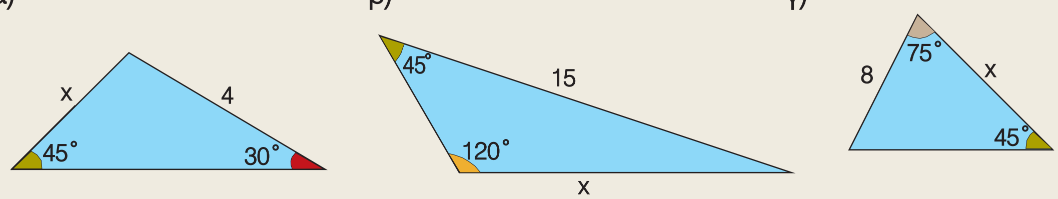
δ) Η πλευρά x υπολογίζεται με το νόμο των .... από την ισότητα ....



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

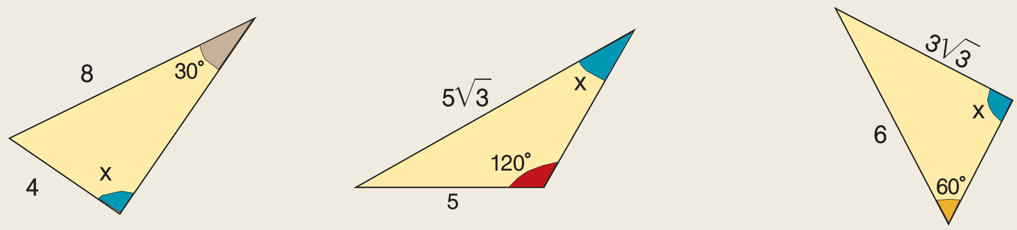
1 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) β) γ)



2 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

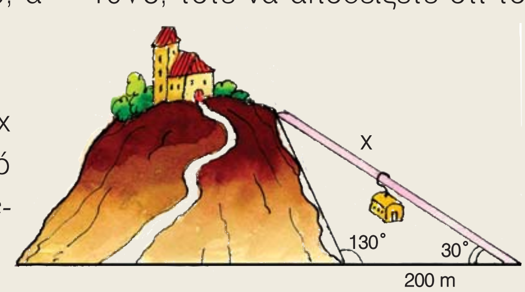
α) β) γ)



3 Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ, όταν:
α) $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\hat{B} = 30^\circ$ **β)** $\beta = \sqrt{2}$, $\gamma = \sqrt{3}$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

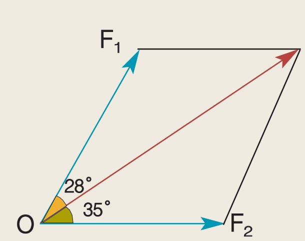
4 Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 30^\circ$, $\beta = 10$, $\alpha = 10\sqrt{3}$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

5 Να υπολογίσετε το μήκος της διαδρομής x του εναέριου σιδηροδρόμου στο διπλανό σχήμα. *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*

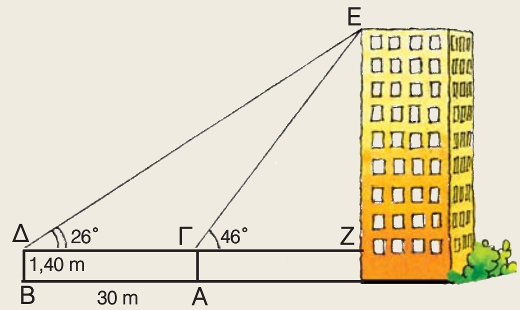


6 Ένας μαθητής απευθυνόμενος στον καθηγητή του των Μαθηματικών είπε:
– Κύριε, σε ένα βιβλίο βρήκα μια άσκηση στην οποία έδινε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 12$, $\beta = 6$, $\hat{B} = 60^\circ$ και ζητούσε να βρεθούν τα υπόλοιπα στοιχεία του. Πώς λύνεται;
Ο καθηγητής αφού είδε την άσκηση τού είπε:
– Κάποιο λάθος έχεις κάνει, γιατί δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο.
Πώς το κατάλαβε ο καθηγητής;

7 Οι δυνάμεις F_1, F_2 έχουν συνισταμένη $F = 10$ N που σχηματίζει με την F_1 γωνία 28° και με την F_2 γωνία 35°. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις F_1, F_2. *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*

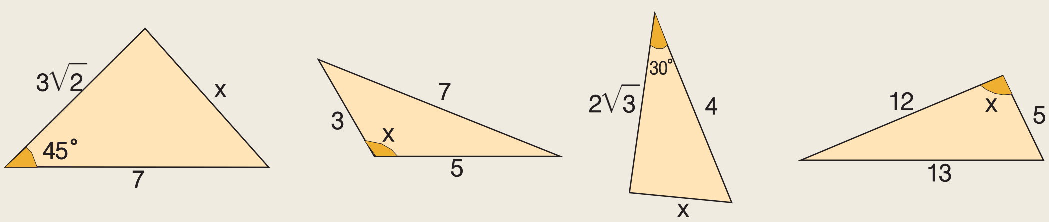


8 Ένας τοπογράφος για να μετρήσει το ύψος ενός ψηλού κτιρίου τοποθέτησε το γωνιόμετρό του στο σημείο Α και βρήκε τη γωνία $E\widehat{\Gamma}Z = 46^\circ$. Στη συνέχεια μετακινήθηκε κατά 30 m, τοποθέτησε το γωνιόμετρο στη θέση Β και βρήκε τη γωνία $E\widehat{\Delta}\Gamma = 26^\circ$. Ποιο ήταν το ύψος του κτιρίου, αν το γωνιόμετρο έχει ύψος 1,4 m. *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*



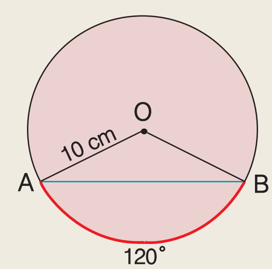
9 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) β) γ) δ)



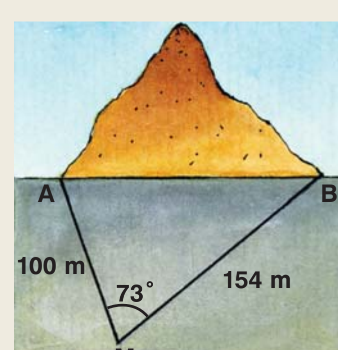
10 Να υπολογίσετε τις ίσες πλευρές β, γ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, αν $\widehat{A} = 120^\circ$ και $\alpha = 3\sqrt{3}$.

11 Σε κύκλο με ακτίνα R = 10 cm, η χορδή ΑΒ αντιστοιχεί σε τόξο 120°. Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής.

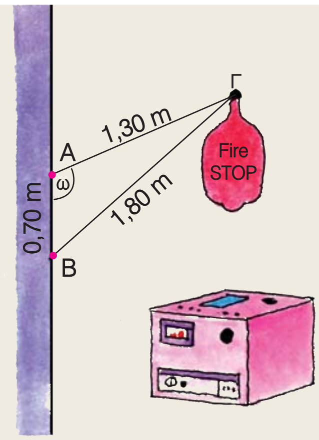


12 Να υπολογίσετε τις διαγωνίους παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ με ΑΒ=4, ΒΓ=3 και $\widehat{A} = 120^\circ$.

13 Μια τεχνική εταιρεία θέλει να καταθέσει μια προσφορά για την κατασκευή μιας σήραγγας ΑΒ. Ένας μηχανικός της εταιρείας με τους συνεργάτες του έστησε ένα γωνιόμετρο στη θέση Μ που η απόστασή του από το Α ήταν 100 m και από το Β ήταν 154 m. Αφού μέτρησε τη γωνία $A\widehat{M}B = 73^\circ$, ισχυρίστηκε ότι με αυτά τα στοιχεία μπορούσε να υπολογίσει το μήκος της σήραγγας. Είχε δίκιο ή άδικο; Πόσο ήταν τελικά το μήκος της σήραγγας; *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*



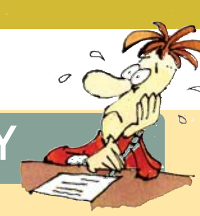
14 Ένας πυροσβεστήρας αυτόματης κατάσβεσης πρόκειται να στηριχτεί πάνω από τον καυστήρα ενός καλοριφέρ. Ένας τεχνικός θέλει να κατασκευάσει τη βάση στήριξής του και διαθέτει τρεις μεταλλικές βέργες ΑΒ = 0,70 m, ΑΓ = 1,30 m και ΒΓ = 1,80 m. Για να κολλήσει όμως κατάλληλα τις βέργες ΑΒ, ΑΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα, πρέπει να γνωρίζει τη γωνία ω. Μπορείτε εσείς να την υπολογίσετε, ώστε να βοηθήσετε τον τεχνικό; (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).



ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ: Υπολογισμός της απόστασης απρόσιτων σημείων.

Υπολογισμός του ύψους ενός ψηλού κτιρίου, ενός βουνού, της απόστασης δύο υφάλων, δύο φάρων κ.τ.λ.



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Να αποδείξετε ότι:

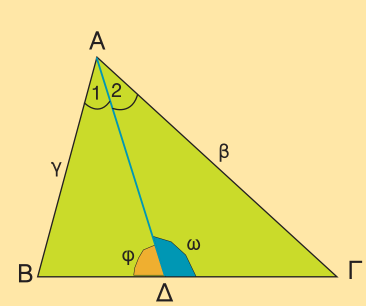
α) $(1 - \etaμx + συνx)^2 = 2(1 - \etaμx)(1 + συνx)$ β) $\dfrac{1 + συνx}{\etaμx} + \dfrac{\etaμx}{1 + συνx} = \dfrac{2}{\etaμx}$

2 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy δίνεται το σημείο Α(4, 0) και το σημείο Μ που έχει τετμημένη –5 και η απόστασή του από το Ο είναι 13. Αν ω είναι η γωνία $A\hat{O}M$, να υπολογίσετε το συνω και την απόσταση ΑΜ.

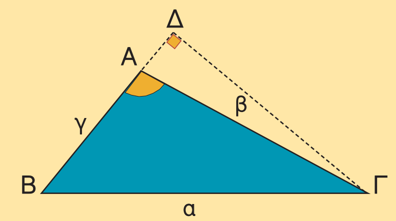
3 Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΒΓ = 30 cm, $\hat{B} = 45^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 75^\circ$. Να χαράξετε τη διχοτόμο ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ, να εξηγήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε το μήκος της διχοτόμου ΑΔ.

4 Αν ΑΔ διχοτόμος τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

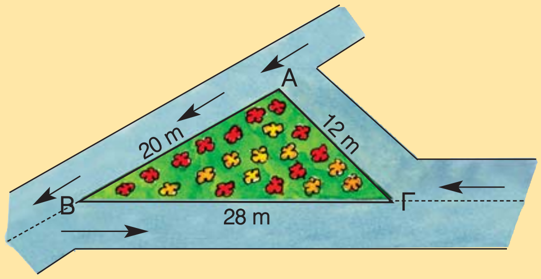
α) $\dfrac{γ}{ΒΔ} = \dfrac{\etaμφ}{\etaμA_1}$ β) $\dfrac{β}{ΓΔ} = \dfrac{\etaμω}{\etaμA_2}$ γ) $\dfrac{γ}{β} = \dfrac{ΒΔ}{ΓΔ}$



5 **α)** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι $Ε = \frac{1}{2}βγ\ ημΑ$.



β) Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{Α}$ και το εμβαδόν του κήπου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος.



6 **α)** Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $ημ^2Α = ημ^2Β + ημ^2Γ$, τότε να αποδειξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

β) Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $ημ(Β + Γ) + συν(Β - Γ) = 2$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

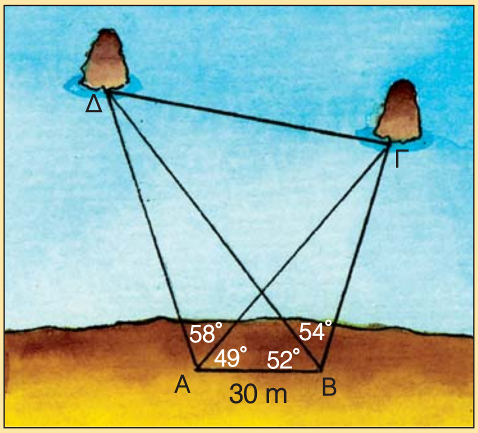
7 Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

α) $α(ημΒ - ημΓ) + β(ημΓ - ημΑ) + γ(ημΑ - ημΒ) = 0$ **β)** $α = βσυνΓ + γσυνΒ$

γ) $β^2 - γ^2 = α(βσυνΓ - γσυνΒ)$ **δ)** $\frac{συνΑ}{α} + \frac{συνΒ}{β} + \frac{συνΓ}{γ} = \frac{α^2 + β^2 + γ^2}{2αβγ}$

8 Να βρείτε τις πλευρές τριγώνου ΑΒΓ, αν τα μήκη τους είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, η γ είναι η μικρότερη πλευρά και $συνΓ = \frac{3}{4}$.

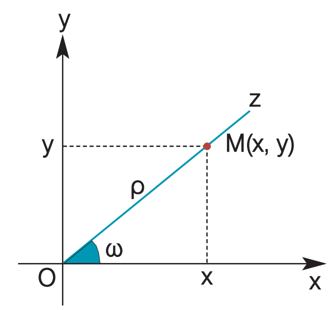
9 Δύο φίλοι τοποθέτησαν τα γωνιόμετρά τους στις θέσεις Α, Β μιας ακτής και παρατήρησαν δύο βράχους που προεξείχαν από την επιφάνεια της θάλασσας. Αν η απόσταση ΑΒ ήταν 30 m και τα αποτελέσματα των μετρήσεων τους φαίνονται στο διπλανό σχήμα, τότε να υπολογίσετε την απόσταση των δύο βράχων. *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy, αν είναι $\omega = x\hat{O}z$, και M(x, y) είναι ένα οποιοδήποτε σημείο της πλευράς Oz, διαφορετικό από το O, τότε:



$$\rho = OM = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ και } ημω = \frac{y}{\rho},\ συνω = \frac{x}{\rho},\ εφω = \frac{y}{x}.$$

Π.χ. αν M(1, 2), τότε $\rho = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

$$ημω = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad συνω = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad εφω = \frac{2}{1} = 2.$$

- **Τα πρόσημα** των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ φαίνονται στο διπλανό πίνακα:

ω	0°		90°		180°
ημω		+		+	
συνω		+		–	
εφω		+		–	

- **Οι παραπληρωματικές γωνίες** έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή,

$$ημ(180^\circ - \omega) = ημω \qquad συν\omega(180^\circ - \omega) = -συνω \qquad εφ(180^\circ - \omega) = -εφω$$

Π.χ. $ημ160^\circ = ημ20^\circ$ $\qquad συν160^\circ = -συν20^\circ$ $\qquad εφ160^\circ = -εφ20^\circ$

- **Οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι:**

$ημ^2ω + συν^2ω = 1$ (Ισχύει για οποιαδήποτε γωνία ω).

$εφω = \dfrac{ημω}{συνω}$ (Ισχύει για οποιαδήποτε γωνία ω με $συνω \neq 0$)

Π.χ. $ημ^2 35^\circ + συν^2 35^\circ = 1$, $\quad εφ35^\circ = \dfrac{ημ35^\circ}{συν35^\circ}$

- **Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν**

– Νόμος των ημιτόνων: $\dfrac{α}{ημΑ} = \dfrac{β}{ημΒ} = \dfrac{γ}{ημΓ}$

– Νόμος των συνημιτόνων:
$α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγ\ συνΑ$
$β^2 = γ^2 + α^2 - 2γα\ συνΒ$
$γ^2 = α^2 + β^2 - 2αβ\ συνΓ$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 1° - 89°

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη	Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2709
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	,01908	5,1446
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,2698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000				

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ – ΟΝΟΜΑΤΩΝ

(256-264) 3-11-06 12:07 ™ÂÏ›‰·256

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΜΕΡΟΣ Α′ – ΑΛΓΕΒΡΑ

Κεφάλαιο 1ο

1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

Α. Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

1 α) 18, β) 10, γ) –7, δ) –20 **2** 2004 **3** 65 km, 25 km

4 α) $\frac{1}{3}$, β) –1, γ) $-\frac{7}{3}$, δ) $-\frac{3}{2}$ **5** α) $-\frac{1}{4}$, β) $\frac{25}{22}$, γ) –5

6 –1 **7** α) +, – β) +, – γ) –, + δ) –, + **8** α), β), γ) Να βγάλετε τις παρενθέσεις και να κάνετε τις πράξεις. **9** Α=4 – (x + y) + (ω + φ)=2, Β=1 + (x + y) – (φ + ω)=3 **10** Είναι α + β = 28, γ + δ = 16, οπότε Α = –24 + (α + β) + 2(γ + δ) = 36 **11** Παρατηρήστε ότι το άθροισμα όλων των αριθμών είναι 0.

Β. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

1 α) 2^3, β) 3^6, γ) 10^3, δ) 5^8, ε) 3^2, στ) 3^6, ζ) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$, η) 3^2

2 α) 4, β) $\frac{1}{9}$, γ) 1, δ) –27, ε) 10.000, στ) 16, ζ) $\frac{9}{4}$, η) $\frac{1}{10}$

3 α) $5x^{10}$, β) x^5y^7, γ) $-8x^4$, δ) $-\frac{8x}{27}$, ε) $-108x^{12}$, στ) $-\frac{2x}{3}$

4 Α = 0, Β = –1, Γ = –100.000, Δ = 125 **5** Εννιά φορές.

Γ. Ρίζες

1 α) $-2\sqrt{5}$, β) $3\sqrt{7}-4\sqrt{3}$, γ) $\frac{11}{28}$, δ) 9 **2** α), β), γ), δ) Να εφαρμόσετε ιδιότητες ριζών **3** α) 4 β) 10 γ) 6 **4** **1η γραμμή:** $12\sqrt{2}$, 10. **2η γραμμή:** $12\sqrt{2}$, 16, **3η γραμμή:** $12\sqrt{2}$, 18, το ΚΛΜΝ **5** α) 10, β) $6\sqrt{2}$, γ) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$, δ) 2 **6** α) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, β) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$, γ) $\frac{\sqrt{5}}{2}$, δ) $2+\sqrt{2}$ **7** α) $x=\sqrt{5}$, β) x = 2, γ) x = 8, δ) x = 0 **8** $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ **9** Παρατηρήστε ότι $ΒΕ=\sqrt{50}+\sqrt{8}=7\sqrt{2}$ **10** Είναι $ΒΓ=3\sqrt{5}$ και $ΔΕ=\sqrt{5}$, οπότε ΒΓ = 3ΔΕ **11** α) $ΑΓ=2\sqrt{5}$, β) $4+2\sqrt{20}$, $2(2+\sqrt{20})$.

1.2 Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα

Α. Αλγεβρικές παραστάσεις – Μονώνυμα

1 α) 4, β) 4 **2** $-\frac{5}{7}α^2β^3$ **3** α) ν = 0, β) ν = 3, γ) ν = 4 **4** α) κ = 3, ν = 2, λ οποιοσδήποτε αριθμός β) λ = 4, κ =3, ν = 2, γ) λ = –4, κ = 3, ν = 2 **5** $Ε=4πρ^2$, $V=\frac{4}{3}πρ^3$, Ε=1256, $V=\frac{12560}{3}$ **6** x + 9, (x ο αριθμός των νικών) **7** x^2+25, 169

Β. Πράξεις με μονώνυμα

1 α) $-3x^2y$, β) $-αx^2$, γ) $\frac{3}{2}x^3$, δ) 0,4αβ, ε) $-\frac{4}{5}xy^2ω^4$, στ) 0

2 α) $-15x^3$, β) $\frac{9}{2}x^5$, γ) $-6x^3y^4$, δ) $6x^3y^5ω$, ε) $-\frac{4}{3}α^2β^6$, στ) $-\frac{1}{3}x^4α^5$, ζ) $-x^3y^4ω^4$ **3** α) $-4α^2$, β) $\frac{4x}{y}$, γ) $-\frac{5}{18}αβ^3$, δ) $-7xω^2$, ε) $4xα^3ω$, στ) $-\frac{5}{7}αβ^5$ **4** α) $\frac{2}{3}x^5y^5$, β) x^3y^5, γ) $-4x^8y^{11}ω^6$ **5** α) $3x^2$, β) 2xy, γ) x^2+xy, δ) $\left(4+\frac{π}{2}\right)x^2$, ε) $2xy+\frac{πx^2}{2}$ – (α), (β), (δ) **6** Είναι ίσα.

1.3 Πολυώνυμα – Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων

1 α) $x^4+2x^3-5x^2+3x+10$, β) $2x^3-6x+1$, γ) $2x^3-3x^2+7x+7$, δ) $-x^4+x-5$ **2** α) 9, β) $y^3-3xy^2+2x^3$. Ο βαθμός ως προς x και y είναι 3 **3** α) P(–3)= 3 και P(2) = 3, β) P(1)= –5 και P(3) = 15 **4** α) Περιμ.= 2πx + 200, Εμβ. = $πx^2+200x$, β) Περιμ.= 388,4 m, Εμβ. = 8826 m^2 **5** α) $-x^3+7x^2-2x+1$, β) $-2x^2y+xy-y^3$, γ) $α^2-7αβ-2β^2$, δ) $3ω^2+ω+3$, ε) $-\frac{1}{2}x^2-\frac{11}{12}x+\frac{4}{3}$, στ) $4x^3+2x^2+4$ **6** α) $5x^3-x^2-4x-2$, β) $2x^3+3x^2-2x+4$, γ) $x^3+5x^2-9x+14$ **7** α) $-7x^2$, +3, –4x β) +5x, $-2x^3$, –1 **8** **1η γραμμή:** $6x^2-2x+1$ **2η γραμμή:** $5x^2+x-2$, x^2+5x-6 **3η γραμμή:** $3x^2-x$, $8x^2-1$ **9** α = –3, β = 7, γ = –4 **10** t^2+20t, 125 m.

1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

1 α) $15x^3y-6x^2y^2$, β) $8x^3-4x^2$, γ) $-x^2+9x$, δ) $-2x^3y+2xy^3$ **2** α) $-8α^2+16αβ-6β^2$, β) x^3, γ) $6x^4-39x^3+45x^2$, δ) x + 20, ε) $-6x^4+11x^3+9x^2-4x$, στ) $-3x^3+14x^2y-3xy^2-20y^3$ **3** α) $12x^4-29x^3+23x^2-6x$, β) $-2x^4+4x^3-5x^2+11x-6$, γ) $22x^3+41x^2y-8xy^2-3y^3$ **4** α) β) Να κάνετε τις πράξεις και αναγωγή ομοίων όρων **5** α) $-8x^3+30x^2-37x+15$, β) $2x^3-11x^2+18x-9$, γ) $-8x^3+24x^2-30x+10$ **6** α = –6, β = 18, γ = –12, δ = 0 **7** γ. **8** Παρατηρήστε ότι $Ε_1=x(x+5)$ και $Ε_2=(x+2)(x-1)$

1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

1 α) x^2+4x+4, β) $y^2+10y+25$, γ) $4ω^2+4ω+1$, δ) $κ^2+4κλ+4λ^2$, ε) $9y^2+12yβ+4β^2$, στ) x^4+2x^2+1, ζ) $y^4+2y^3+y^2$, η) $4x^4+12x^3+9x^2$, θ) $x^2+2\sqrt{2}x+2$, ι) $x+2\sqrt{xy}+y$, ια) $α^2+α+\frac{1}{4}$, ιβ) $ω^2+8+\frac{16}{ω^2}$

2 α) x^2-6x+9, β) $y^2-10y+25$, γ) $9ω^2-6ω+1$, δ) $4κ^2 - 4κλ + λ^2$, ε) $9y^2 - 12yβ + 4β^2$, στ) $x^4 - 4x^2 + 4$, ζ) $y^4 - 2y^3 + y^2$, η) $4x^4 - 20x^3 + 25x^2$, θ) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$, ι) $x - 2\sqrt{xy} + y$, ια) $α^2 - 3α + \frac{9}{4}$, ιβ) $ω^2 - 4 + \frac{4}{ω^2}$

3 α) $4 + 2\sqrt{3}$, β) $11 + 2\sqrt{30}$, γ) $11 - 6\sqrt{2}$, δ) $8 - 2\sqrt{7}$ **4** α) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$, β) $(y-4)^2 = y^2 - 8y + 16$, γ) $(4x-α)^2 = 16x^2 - 8xα + α^2$, δ) $(x^2 - 2ω)^2 = x^4 - 4x^2ω + 4ω^2$

5 α) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, β) $y^3 + 12y^2 + 48y + 64$, γ) $8α^3 + 12α^2 + 6α + 1$, δ) $27α^3 + 54α^2β + 36αβ^2 + 8β^3$, ε) $x^6 + 9x^4 + 27x^2 + 27$, στ) $y^6 + 3y^5 + 3y^4 + y^3$, ζ) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, η) $y^3 - 15y^2 + 75y - 125$, θ) $27α^3 - 27α^2 + 9α - 1$, ι) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$, ια) $y^6 - 6y^4 + 12y^2 - 8$, ιβ) $ω^6 - 6ω^5 + 12ω^4 - 8ω^3$

6 α) $x^2 - 1$, β) $y^2 - 4$, γ) $9 - ω^2$, δ) $16 - x^2$, ε) $y^2 - x^2$, στ) $x^2 - y^2$, ζ) $4x^2 - 49y^2$, η) $x^2 - 2$, θ) $x - y$ **7** P(x) = 20 = σταθερό **8** α) Διαφορά τετραγώνων (3 φορές), β) Προηγούμενη ταυτότητα για α = 10 και β = 1

9 α) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ β) $\frac{3(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{2}$ γ) $\frac{5(3-\sqrt{2})}{7}$, δ) $2(2\sqrt{3} - \sqrt{6})$

10 α) $x^3 - 27$, β) $y^3 + 8$, γ) $8ω^3 + 1$, δ) $1 - α^3$

11 α) $5x^2 + 12x + 41$, β) $-2x^2 + 10$, γ) $4x^2 - 2xy + 6y^2$, δ) 64, ε) $16α^3 + 12α$, στ) $6α^2 + 12α$, ζ) $6α^5 + 2α^3$, η) $-48α^2 + 13α - 1$ **12** α), β), γ) Να κάνετε τις πράξεις στο α′ μέλος, δ), ε), στ) Να κάνετε τις πράξεις σε κάθε μέλος **13** α) 4, β) $12\sqrt{5}$, γ) 28, δ) 144 **14** α) Να κάνετε τις πράξεις στο α′ μέλος, β) Προηγούμενη ταυτότητα για α = 2005, x = 20 **15** Να αποδείξετε ότι στο τρίγωνο ΓΔΒ ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα **16** Να αποδείξετε την ταυτότητα $\frac{(α+β)^2-(α-β)^2}{αβ} = 4$ **17** α) Να κάνετε πράξεις στο β′ μέλος, β) Να χρησιμοποιήσετε προηγούμενη ταυτότητα (Ε = 24 cm^2) **18** Ίδιο εμβαδόν, αφού $(α-β)(α+β) = α^2 - β^2$

1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

1 α) $3(α+2β)$, β) $2(x-4)$, γ) $2ω(4ω+3)$, δ) $-3x(3x+2)$, ε) $4αβ(2α+β)$, στ) $2x(x-y+1)$, ζ) $αβ(α+β-1)$, η) $2α^2(α-2+3β)$, θ) $\sqrt{2}\,y(x-3+2y)$ **2** α) $(α-β)(x+y)$, β) $(x+y)(α+β)$, γ) $(x-2)(2x-5)$, δ) $(α-2)(α^2+3)$, ε) $(x-1)(4x-1)$, στ) $2x(x-3)(-2x+9)$ **3** i) α) $x(x+1)$, β) $y(2y-5)$, γ) $(ω-3)(ω+2)$, δ) $3α(α-1)$ ii) α) $x = 0$ ή $x = -1$, β) $y = 0$ ή $y = \frac{5}{2}$, γ) $ω = 3$ ή $ω = -2$, δ) $α = 0$ ή $α = 1$

4 α) $(x+y)(x+α)$, β) $(x-1)(x^2+1)$, γ) $(x-5)(x^2+4)$, δ) $(2x-3)(x^2+2)$, ε) $(x-2)(4x-α)$, στ) $(α-2β)(9β-5)$, ζ) $(3x-2y)(4x-5)$, η) $(x+\sqrt{2})(x^2+1)$, θ) $(\sqrt{3}x+2)(\sqrt{2}x-1)$ **5** α) $(α+β)(7α+3β)$, β) $(x-y)(5x-3y)$, γ) $(x-y)(3x+2y)$ **6** α) $(α+β)(αβ-1)$, β) Να αποδείξετε ότι α = −β ή αβ=1 **7** α) $(α-1)(2α+β+x)$, β) $(α-2)(2β+5+2y)$ **8** α) $(x-3)(x+3)$, β) $(4x-1)(4x+1)$, γ) $(α-3β)(α+3β)$, δ) $(αβ-2)(αβ+2)$, ε) $5(ω-1)(7ω+5)$, στ) $(-x+8)(5x-4)$, ζ) $\left(\frac{1}{x}-4\right)\left(\frac{1}{x}+4\right)$, η) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$, θ) $(x-\sqrt{2}y)(x+\sqrt{2}y)$

9 α) $2(x-4)(x+4)$, β) $7(2-y)(2+y)$, γ) $2x(x-1)(x+1)$, δ) $5α(x-4)(x+4)$, ε) $2(x-3)(x+1)$

10 Να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα: $α^2 - β^2 = (α-β)(α+β)$ α) 45, β) 0,35, γ) 24λ **11** α) $x = 7$ ή $x = -7$, β) $x = 0$ ή $x = \frac{2}{3}$ ή $x = -\frac{2}{3}$, γ) $x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -3$, δ) $x = -2$ ή $x = -3$ ή $x = -1$ **12** α) $(x-3)(x^2+3x+9)$, β) $(y+2)(y^2-2y+4)$, γ) $(ω+4)(ω^2-4ω+16)$, δ) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$, ε) $(3y+1)(9y^2-3y+1)$ **13** α) $3(x-2)(x^2+2x+4)$, β) $2α(2α+1)(4α^2-2α+1)$, γ) $\frac{4}{3}π(R-ρ)(R^2+Rρ+ρ^2)$, δ) $αβ(α+β)(α^2-αβ+β^2)$

14 α) $x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9)$, β) $8x^3 + y^3 = (2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$, γ) $α^3 - 8β^3 = (α-2β)(α^2+2αβ+4β^2)$, δ) $α^3 + 125β^3 = (α+5β)(α^2-5αβ+25β^2)$ **15** α) $(x-1)^2$, β) $(y+2)^2$, γ) $(ω-3)^2$, δ) $(α+5)^2$, ε) $(1-2β)^2$, στ) $(3x^2+1)^2$, ζ) $(2y-3)^2$, η) $(4x+y)^2$, θ) $(5α-β)^2$, ι) $(α+β-1)^2$, ια) $\left(\frac{y}{3}-3\right)^2$, ιβ) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

16 α) $3(x+4)^2$, β) $-(y-2)^2$, γ) $2(α-2β)^2$, δ) $α(2α+3)^2$ **17** α) $x^2 + 2xy + y^2$, β) $x + y$ **18** $x+1$ **19** α) $(x+1)(x+2)$, β) $(y-1)(y-3)$, γ) $(ω+2)(ω+3)$, δ) $(α+1)(α+5)$, ε) $(x-4)(x-3)$, στ) $(y+3)(y-4)$, ζ) $(ω-3)(ω-6)$, η) $(α+5)(α-2)$ **20** α) $(x+2)(x+\sqrt{3})$, β) $(x+2α)(x+3β)$, γ) $(x+3)(x-\sqrt{2})$ **21** α) $2(ω+1)(ω+4)$, β) $3(α-5)(α+1)$, γ) $α(x-1)(x-6)$ **22** α) Να βγάλετε κοινό παράγοντα 1453, β) Να βγάλετε κοινό παράγοντα 801, γ) Διαφορά τετραγώνων, δ) Παρατηρήστε ότι 999 = 1000 − 1, 1001 = 1000 + 1, ε) $999^2 + 2 \cdot 999 + 1 = (999+1)^2$, στ) $97^2 + 6 \cdot 97 + 9 = (97+3)^2$

23 α) $(x-2)(x+2)(y-1)(y+1)$, β) $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)$, γ) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$, δ) $(x-3)^2(x+3)^2$, ε) $(α-β)(α-β-1)$, στ) $(x-y-ω)(x-y+ω)$, ζ) $(1+α-β)(1-α+β)$, η) $(y-5+x)(y-5-x)$, θ) $(x-1)(x-2)(-3x+14)$, ι) $(y+2)^2(y-3)(y-1)$, ια) $(α-β+γ)(α-β-γ)(α+β+γ)(α+β-γ)$, ιβ) $(2x-3α)^2$

24 Η πλευρά x μειώθηκε κατά 2 ενώ η πλευρά y μειώθηκε κατά 1.

1.7 Διαίρεση πολυωνύμων

1 α) $\pi(x)=2x^2-3x+3$, $\upsilon(x)=0$, β) $\pi(x)=2x^2-x-3$, $\upsilon(x)=8$, γ) $\pi(x)=6x^3+6x^2+5x+7$, $\upsilon(x)=0$, δ) $\pi(x)=2x^2+x+3$, $\upsilon(x)=-5$, ε) $\pi(x)=x^3-2x+1$, $\upsilon(x)=5x$, στ) $\pi(x)=3x^2+x-1$, $\upsilon(x)=0$, ζ) $\pi(x)=4x^2+3$, $\upsilon(x)=0$, η) $\pi(x)=x^3-\frac{1}{3}x$, $\upsilon(x)=-\frac{1}{3}x-4$

2 α) $\Delta(x)=6x^2+22x+12$, $\delta(x)=3x+2$, $\pi(x)=2x+6$, β) $\Delta(x)=2x^3+10x^2+2x+20$, $\delta(x)=x+3$, $\pi(x)=2x^2+4x-10$, $\upsilon(x)=50$ **3** $2x^3+x^2+2x+5$ **4** α), β) Να αποδείξετε ότι η διαίρεση $P(x): Q(x)$ είναι τέλεια **5** α) $\pi(x)=x^2-2x+1$, $\upsilon(x)=0$, β) $(x-3)(x+3)(x-1)^2$ **6** α) Να κάνετε τη διαίρεση, β) $(x+1)^4$ **7** Θα έκανε τη διαίρεση $(\alpha^3+\beta^3):(\alpha+\beta)$ **8** α) $\pi(x)=x^2-5$, $\upsilon(x)=4x^2-6x+7$, β) $\pi(x)=x^3+6$, $\upsilon(x)=-6x+27$ **9** $\pi(x)=6x^2+6x+6$, $\upsilon(x)=\alpha+6$ και $\alpha=-6$ **10** $2x+3$ **11** Παρατηρήστε ότι το εμβαδόν του δωματίου είναι $45x^2+56xy+16y^2$, Μήκος $=9x+4y$.

1.8 Ε.Κ.Π. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων

1 α) Ε.Κ.Π $=72x^3y^3\omega^4$, Μ.Κ.Δ. $=6x^2y\omega^2$, β) Ε.Κ.Π. $=30\alpha x^2y^3\omega^2$, Μ.Κ.Δ. $=5$, γ) Ε.Κ.Π. $=24x^2y^3(x+y)^2(x-y)$, Μ.Κ.Δ $=x(x+y)$ **2** α) Ε.Κ.Π$=12(x+y)(x-y)^3$, Μ.Κ.Δ.$=2(x-y)$, β) Ε.Κ.Π $=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha+2)$, Μ.Κ.Δ. $=\alpha-2$, γ) Ε.Κ.Π. $=\alpha^2(\alpha+1)(\alpha-1)^2$, Μ.Κ.Δ. $=\alpha(\alpha-1)$.

1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

1 α) $x\neq 4$, β) $y\neq \frac{5}{2}$, γ) $\omega\neq -1$, δ) $x\neq 0$ και $x\neq 3$

2 α) $\frac{2}{3}$, β) $\frac{y}{4}$, γ) $\frac{\omega}{4x}$, δ) $\frac{\alpha\gamma^2}{2\beta}$, ε) 1, στ) -1, ζ) $\frac{1}{\omega-2}$, η) 1

3 α) $\frac{3}{x+2}$, β) $\frac{3}{y}$, γ) $\frac{x}{\omega}$, δ) $\frac{5(\alpha+2)}{\alpha-2}$, ε) $\frac{x+4}{x}$, στ) $\frac{y-1}{y+1}$, ζ) $\frac{3x}{2x-\omega}$, η) $\frac{1}{\alpha-\beta}$ **4** α) $\frac{x+1}{x+2}$, β) $\frac{y-1}{y-2}$, γ) $\frac{\omega-1}{\omega+1}$,

5 α) $\frac{x+4}{x+3}$, β) $\frac{y-3}{2y-3}$, γ) $\frac{3}{\omega^2+1}$, δ) $\frac{\alpha-4}{\alpha}$ **6** Η μέση ταχύτητα είναι $\frac{A\Gamma}{2t}=\frac{5t+2t^2}{2t}$

1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων

Α. Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση ρητών παραστάσεων

1 α) $\frac{1}{xy}$, β) $\frac{3}{4y}$, γ) $\frac{4x}{3}$, δ) $\frac{\alpha}{\beta}$, ε) $\frac{-3\omega}{2}$, στ) $\frac{6}{\alpha}$

2 α) $\frac{4x^2}{3}$, β) $\frac{-1}{3y}$, γ) $\frac{-1}{3\beta^3}$, δ) $2\omega x$ **3** α) $\frac{8}{x}$, β) -1, γ) $\frac{x}{\omega(x+\omega)}$, δ) $\frac{1}{\alpha}$, ε) $\frac{x+1}{x-2}$, στ) $\frac{y+3}{2y-3}$ **4** α) 3, β) -1, γ) $-\frac{1}{\omega}$, δ) $\frac{1}{\beta(\alpha+1)}$, ε) $\frac{1}{x^2}$, στ) 1 **5** α) $\frac{x-2}{2(x-1)}$, β) $\frac{1}{2}$, γ) $\frac{(x+2)^2}{2(x+3)^2}$

Β. Πρόσθεση - Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

1 α) $\frac{x+y}{xy}$, β) $\frac{x-2}{x(x+1)}$, γ) $\frac{1-y}{y^2}$, δ) $\frac{1-\omega^2}{\omega^2(\omega^2+1)}$,

2 α) 1, β) $-\frac{3}{y}$, γ) $\frac{1}{\omega-2}$, δ) $\frac{-1}{2(x-6)}$, ε) $\frac{6}{x-\omega}$, στ) $\frac{-2}{\alpha+3}$

3 α) $x-1$, β) $\frac{y-1}{y+1}$, γ) $\frac{\omega^2}{\omega-1}$, δ) $\frac{1}{\beta+\alpha}$ **4** α) $\frac{x+2}{x}$, β) $\frac{3}{x-2y}$, γ) $\frac{y+3}{y-3}$, δ) $x+y$ **5** α) $\frac{2}{2x+1}$, β) $\frac{2}{x+1}$, γ) $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$, δ) $\frac{1}{\alpha+\beta}$ **6** α) Να απλοποιήσετε το κλάσμα, β) Να εφαρμόσετε την (α) για $x=56$, $y=44$ **7** β) Να εφαρμόσετε την (α) για $x=100$

Γενικές ασκήσεις 1ου κεφαλαίου

1 $-\frac{217}{24}$ **2** Να λάβετε υπόψη σας ότι $2\nu+1$ είναι περιττός, ενώ ο 2ν είναι άρτιος **3** $A=4$, $B=3$ **4** β) Παρατηρήστε ότι $P(-99)=P(1-100)=P(100)$ **5** α) Να κάνετε τις πράξεις στο β′ μέλος, β) Να χρησιμοποιήσετε το (α), γ) Να χρησιμοποιήσετε το (β), **6** α) Να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$, β) Να χρησιμοποιήσετε το (α) **7** α) Αποδείξτε ότι $(x-y)(x+y)(x^2+2)=0$, β) Αποδείξτε ότι $(x-y)^2(x+y)=0$ **8** α) $(x+1)(x+3)$, $(x+3)(x-1)$ β) $A=\frac{3}{(x+3)(x-1)}$ **9** β) Να χρησιμοποιήσετε το (α) **10** α) $R=4x^2+1$, β) $R=4x^2+1$ **11** α) $\kappa^2+\kappa=\kappa(\kappa+1)$ και ένας από τους δύο είναι άρτιος, β), γ) Να χρησιμοποιήσετε το (α) **12** α) $x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$, να θέσετε $x=7$ β) $x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$. Παρατηρήστε ότι $2^{15}+1==(2^3)^5+1=8^5+1$ και να θέσετε $x=8$. **13** α) Να κάνετε τις πράξεις στο δεύτερο μέλος.

Κεφάλαιο 2ο

2.1. Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$

1 α) $x=-2$, β) Αδύνατη, γ) Ταυτότητα, δ) $x=-\frac{23}{2}$

2 α) $x=-1$, β) Ταυτότητα, γ) Αδύνατη, δ) $x=2$ **3** Ο αριθμός 6 **4** Δεν μπορεί γιατί είχε 60 € **5** Αν πάρουμε τυχαίο αριθμό x, τότε προκύπτει η εξίσωση $0x=0$ (Ταυτότητα) **6** Σε 2 ώρες.

2.2. Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

Α. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων.

1 α) $x = 4$ ή $x = -1$, β) $y = 0$ ή $y = -5$, γ) $\omega = 3$ ή $\omega = -\frac{1}{2}$, δ) $x = 0$ ή $x = 7$, ε) $y = 0$ ή $y = 6$, στ) $\omega = \frac{1}{2}$ (διπλή λύση), **2** α) $x = 0$ ή $x = 7$, β) $y = 0$ ή $y = -9$, γ) $\omega = 6$ ή $\omega = -6$, δ) Αδύνατη, ε) $\varphi = 4$ ή $\varphi = -4$, στ) $z = 0$ ή $z = 3$ **3** α) $x = 0$ ή $x = 1$, β) $x = 0$ ή $x = -4$, γ) Αδύνατη, δ) $x = 0$ ή $x = 18$, ε) $x = 1$ ή $x = \frac{1}{5}$, στ) $x = 0$ ή $x = -2\sqrt{3}$ **4** α) $x = -\frac{1}{3}$ ή $x = \frac{4}{3}$, β) $y = 7$ ή $y = -5$, γ) $\omega = 4$ ή $\omega = -4$ **5** α) $x = 2$ (διπλή λύση), β) $y = 3$ ή $y = -4$, γ) $\omega = 5$ ή $\omega = -3$, δ) $t = 2$ ή $t = \frac{3}{2}$, ε) $\varphi = 1$ ή $\varphi = \frac{1}{3}$, στ) $z = -1$ ή $z = \frac{8}{5}$ **6** α) $x = -\frac{1}{5}$ (διπλή λύση), β) $y = 2$ ή $y = -2$ (διπλή λύση), γ) Να αντικαταστήσετε το 2006ω με $2007\omega - \omega$, $\omega = 1$ ή $\omega = -2007$. **7** α) $x = \alpha$ ή $x = \beta$, β) $x = \sqrt{3}$ ή $x = -1$.

Β. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου.

1 **1η σειρά:** $x^2 - x + 2 = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 2$. **2η σειρά:** $3x^2 - 2x = 0$, $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = 0$. **3η σειρά:** $-x^2 + 1 = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ **2** α) $x = -1$ ή $x = 2$, β) $y = -1$ ή $y = \frac{1}{4}$, γ) $\omega = 2$ ή $\omega = -\frac{3}{2}$, δ) $z = 1$ ή $z = \frac{1}{2}$, ε) $t = \frac{1}{5}$ (διπλή λύση), στ) $x = \frac{3}{2}$ (διπλή λύση), ζ) $x = -3$ (διπλή λύση), η) $x = -1$ ή $x = 5$, θ) Αδύνατη **3** α) $x = 0$ ή $x = 7$, β) $x = 4$ ή $x = -4$ **4** α) $x = 1$ ή $x = \frac{1}{3}$, β) $y = -1$ ή $y = 5$, γ) $\omega = 4$ (διπλή λύση), δ) Αδύνατη **5** α) $x = 2$ ή $x = \frac{8}{5}$, β) $y = \frac{5}{2}$ (διπλή λύση), γ) $t = 1$ ή $t = \frac{6}{5}$, δ) $\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $\omega = 2\sqrt{3}$ **6** α) $(x - 2)(x + 6)$, β) $3\left(y - \frac{5}{3}\right)(y - 1)$, γ) $-2(\omega - 1)\left(\omega - \frac{3}{2}\right)$, δ) $(x - 8)^2$, ε) $9\left(y + \frac{2}{3}\right)^2$, στ) $-(\omega - 5)^2$ **7** α) Είναι $\Delta = (2\alpha - 1)^2 \geq 0$, β) Είναι $\Delta = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$ **8** Να δείξετε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

2.3. Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

1 α) $x = 10$ m, β) $x = 7$ m, γ) $x = 4$ m, δ) $x = 6$ m **2** α) 4, β) 6, γ) 3 **3** 2 dm **4** 50 m **5** 5 και 7 ή –7 και –5 **6** Οι σελίδες είναι 22 και 23 **7** 16 ομάδες **8** $x = 2$ **9** 35 και 2 **10** 18 cm, 24cm **11** 3 m **12** 4 m **13** 6 sec, 180 m.

2.4. Κλασματικές εξισώσεις

1 α) $x = 5$, β) $y = -9$, γ) αδύνατη, δ) $\alpha = 2$, ε) x είναι οποιοσδήποτε αριθμός με $x \neq 3$, στ) αδύνατη **2** α) $x = 1$ ή $x = 3$, β) $y = 5$ ή $y = \frac{1}{2}$, γ) $\omega = 1$ ή $\omega = -3$, δ) $\alpha = 3$ ή $\alpha = -2$, ε) αδύνατη, στ) $y = 4$ **3** α) $x = 10$, β) y είναι οποιοσδήποτε αριθμός με $y \neq 2$ και $y \neq -1$, γ) αδύνατη, δ) $\alpha = 1$ **4** α) $y = 2$, β) αδύνατη, γ) $x = 0$ ή $x = 3$, δ) $\alpha = -\frac{1}{4}$ **5** α) $x = 4$ ή $x = -4$, β) $x = 6$ **6** α) $V = \frac{m}{p}$, β) $R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E}$, γ) $S = \frac{p\ell}{R}$, δ) $T_1 = \frac{P_1V_1T_2}{P_2V_2}$, ε) $R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$, στ) $\alpha = \frac{\beta\gamma}{2\gamma - \beta}$, ζ) $\upsilon_\alpha^2 = \frac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2}$, η) $\lambda = \frac{S - \alpha}{S}$. **7** α) 4 και $\frac{1}{4}$, β) 5, γ) 6 και 8 **8** $\frac{84}{x} + 9 = \frac{84}{x - 3}$, $x = 7$ **9** $\frac{240}{x} = \frac{240}{x + 2} + 4$, $x = 10$ **10** $\frac{12}{x} + \frac{15}{x - 0,2} = 25$, $x = 1,2$ gr/cm³ **11** $\frac{120}{x} = \frac{120}{x - 2} - 3$, $x = 10$ **12** $\frac{210}{x} - \frac{210}{x + 10} = \frac{1}{2}$, $60\frac{km}{h}$.

2.5. Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο

1 Παρατηρήστε ότι $3(\alpha - \beta) - 2(\alpha + \beta) > 0$ **2** α) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το –5, και στη συνέχεια αφαιρούμε και από τα δύο μέλη το 30, β) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το 3 και στη συνέχεια προσθέτουμε και στα δύο μέλη το 18, γ) Προσθέτουμε και στα δύο μέλη το 4 και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το 2 **3** α) $0 < \alpha - 2 < 4$, β) $-1 < 2\alpha - 5 < 7$, γ) $-5 > 1 - 3\alpha > -17$ **4** α), β) Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες της διάταξης, γ) Παρατηρήστε ότι $2\alpha < \alpha + \beta$, δ) Παρατηρήστε ότι $\alpha + \beta < 2\beta$ **5** και **6** Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες της διάταξης **7** Να πολλαπλασιάσετε κατά μέλη τις ανισότητες $\alpha > \beta$ και $\alpha > \beta$ **8** α) Να πολλαπλασιάσετε και τα δύο μέλη της ανισότητας $\alpha > 1$ με το α, β) Να πολλαπλασιάσετε και τα δύο μέλη της ανισότητας $x > 2$ με το x^2 **9** Να διαιρέσετε τα μέλη της ανισότητας $\alpha > \beta$ με $\alpha\beta > 0$ **10** α) Παρατηρήστε ότι $x - 3 > 0$ και $y - 2 < 0$, β) Παρατηρήστε ότι $xy + 6 - 2x - 3y = (x - 3)(y - 2)$ **11** α) Παρατηρήστε ότι $(x - 1)^2 \geq 0$. Η ισότητα ισχύει όταν

$x = 1$, **β)** Παρατηρήστε ότι $(x - y)^2 \geq 0$. Η ισότητα ισχύει όταν $x = y$, **γ)** Παρατηρήστε ότι $x^2 + (y - 1)^2 \geq 0$. Η ισότητα ισχύει όταν $x = 0$ και $y = 1$. **12** **α)** Η ανισότητα γίνεται $(x-1)^2 \geq 0$, **β)** Η ανισότητα γίνεται $(x + 1)^2 \geq 0$ **13** 126 **14** Μεταξύ 126 € και 145 € **15** $16{,}51 < B < 19{,}10$ – ναι **16** **α)** $x > 1$, **β)** $x < -5$, **γ)** αδύνατη, **δ)** $x < -4$, **ε)** αληθεύει για κάθε τιμή του x, **στ)** $x > 0$ **17** **α)** $-4 < x < 9$, **β)** $x > -2$, **γ)** $x < -2$ **18** $x = 3$.

Γενικές ασκήσεις 2ου κεφαλαίου

1 **α)** $x = -\alpha - \beta$, **β)** $x = -\beta$ **2** $x = 3, y = 5$ **3** 15 και 16 **4** **α)** $x = -\frac{2\alpha}{3}$, **β)** $x = \frac{1-3\alpha}{6}$ **5** $x = 2$ **6** Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x - 3)$ και οι λύσεις είναι $3, -1, -5$ **7** 2 και 3 **8** 19m και 21m **9** Πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ, ΑΒΓ, οπότε $x = 9$ **10** Προσδιορίστε το πρόσημο της διαφοράς τους, όταν $\alpha\beta > 0$, $\alpha\beta < 0$, $\alpha\beta = 0$ **11** **α)** Να κάνετε τις πράξεις στο πρώτο μέλος, **β)** Να χρησιμοποιήσετε το (α) **12** Πολλαπλασιάστε και τα δύο μέλη με $\nu(\nu + 1)(\nu + 2) > 0$ **13** **α)** Να χρησιμοποιήσετε την τριγωνική ανισότητα $\alpha + \beta > \gamma$, **β)** Να χρησιμοποιήσετε τις τριγωνικές ανισότητες $\alpha < \beta + \gamma$ και $\alpha + \gamma > \beta$, γ) Να χρησιμοποιήσετε κυκλικά το ερώτημα (β) **14** Παρατηρήστε ότι $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ και $\frac{\beta}{\gamma} > 1$ **15** Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 5\alpha(\alpha-4) > 0$ **16** Παρατηρήστε ότι $(\alpha-1)^2 + (\beta-2)^2 + (\gamma-3)^2 = 0$, οπότε $\alpha = 1$, $\beta = 2$ και $\gamma = 3$ **17** Παρατηρήστε ότι $A = (\alpha-5\beta)^2 + 2(\beta-2)^2 \geq 0$, η ελάχιστη της Α είναι 0 όταν $\alpha = 10$ και $\beta = 2$ **18** Η εξίσωση γίνεται $(x - 2020)\left(\frac{1}{2001} + \frac{1}{2003} + \frac{1}{2005} + \frac{1}{2007}\right) = 0$, οπότε $x = 2020$.

Κεφάλαιο 3ο

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

1 $\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2 \,//\, \varepsilon_3$ **2** **α)** $\lambda = 4$ **3** **α)** Α(3, 0), Β(0, 4), **β)** $E = 6$ **4** **α)** $(-2, 2)$, **β)** ζ_3 **5** **β)** Σχηματίζεται ορθογώνιο με εμβαδόν 30 **6** **α)** $\lambda = 2$, **β)** $\lambda = 1$ **7** **α)** $x + 2y = 4$, **β)** 15 λεπτά **8** $2x + 3y = 25$, (2, 7), (5, 5), (8, 3) (11, 1).

3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του

1 **α)** (3, 2), **β)** (1, 3), **γ)** (0, 0), **δ)** (1, 1), **ε)** Αόριστο, **στ)** Αδύνατο **2** **α)** Καμμία, **β)** Άπειρες, **γ)** Μία **3** **α)** 0 m/sec, 10 m/sec, **β)** t = 10 sec, υ = 20 m/sec **4** **α)** 1η περίπτωση: ε_1, 2η περίπτωση: ε_2, 3η περίπτωση: ε_3, **β)** 24 αγώνες, **γ)** 2η, **δ)** 90 €, **ε)** 1η περίπτωση: αν παρακολουθήσει μέχρι και 6 αγώνες, 2η περίπτωση: αν παρακολουθήσει από 6 μέχρι και 24 αγώνες, 3η περίπτωση: αν παρακολουθήσει από 24 αγώνες και πάνω.

3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

1 **α)** $x = 9$, $y = 4$, **β)** $x = \frac{2}{5}$, $y = -\frac{4}{5}$, **γ)** $x = 3$, $y = 2$, **δ)** $x = -1$, $y = -1$ **2** **α)** $x = 11$, $y = 26$, **β)** $x = \frac{4}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, **γ)** $x = y = 0$, **δ)** αδύνατο **3** **α)** $x = y = 4$, **β)** $x = -3$, $y = -2$, **γ)** $x = 5$, $y = 4$ **4** **α)** $x = 0$, $y = -2$, **β)** $x = 3$, $y = -3$ **5** **α)** $\alpha = 1$, $\beta = -1$, **β)** $\omega = 2$, $\varphi = -5$, **γ)** $x = -2$, $y = 1$ **6** **α)** $x = 1$, $y = 2$, **β)** Πολλαπλασιάστε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης με το -2 και προσθέστε κατά μέλη, $\alpha = 2$, $\beta = -6$, **γ)** Πολλαπλασιάστε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης με 3 και προσθέστε κατά μέλη, $\omega = \varphi = 3$ **7** $M\left(\frac{15}{7}, \frac{8}{7}\right)$ **8** Κοινό σημείο των ε_1 και ε_2 είναι το $(-4, 2)$, κοινό σημείο των ε_2 και ε_3 είναι το $(3, -5)$ και κοινό σημείο των ε_3 και ε_1 είναι το (8, 10) **9** 45 και 55 **10** $\alpha = 5$, $\beta = 1$ **11** $\alpha = -1$, $\beta = 1$ **12** $\lambda = 5$, $\mu = 7$ **13** $\pi = 20$ cm, $\gamma = 30$ cm **14** 500 των 2 κιλών και 300 των 5 κιλών **15** Φυσική 19 και Χημεία 13 **16** 35 cm και 23 cm **17** $\theta = 16$, $\mu = 24$ **18** 250 και 150 λίτρα **19** $\upsilon_0 = 20$ m/sec και $\alpha = 4$ m/sec^2 – Σε 5 sec **20** 845 αυτοκίνητα και 100 μοτοσικλέτες **21** 10 και 2.

Γενικές ασκήσεις 3ου κεφαλαίου

1 Αδύνατο αν $\kappa \neq 1$ και αόριστο αν $\kappa = 1$ **2** $\lambda = 5$ και $\mu = -2$ **3** $\alpha = 2$ και $\beta = 10$ **4** **α)** $x = y = 1$, β) $x = y = -2$ **5** α) $(x = 1,\ y = 2)$ ή $(x = 4,\ y = -4)$, β) $x = -2$ και $y = -1$, γ) $x = y = \frac{7}{2}$ **6** 83 και 17 **7** $\lambda = 2$ και $\kappa = 1$ **8** 11 cm και 7 cm **9** 9 και 4 **10** Α′ θέση: 50 εισιτήρια – Β′ θέση: 300 εισιτήρια **11** 64 **12** 75 **13** 32 m και 28 m **14** 30 λεπτά και 15 λεπτά **15** 75 km/h και 60 km/h **16** 25 m/sec και 120 m **17** $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 6\Omega$.

Κεφάλαιο 4ο

4.1 Η συνάρτηση $y = \alpha x^2$ με $\alpha \neq 0$

1 και **2** Εργαστείτε όπως στο παράδειγμα 2

3 $y=-\frac{1}{4}x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$ **4** $A\left(\frac{3}{2},-9\right)$, $B\left(-\frac{3}{2},-9\right)$
5 $\lambda=0$ **6** $\lambda=-2$ **7** α) Να κάνετε τα διαγράμματα $E=\frac{1}{2}υ^2$, $E=υ^2$, $E=2υ^2$, β) Εκείνο που έχει μάζα 1 (μικρότερη), γ) Εκείνο που έχει μάζα 4 (μεγαλύτερη).

4.2 Η συνάρτηση $y=αx^2+βx+γ$ με $α\neq 0$

1 α), β) Εργαστείτε όπως στο παράδειγμα 3 **2** α) Ελάχιστη τιμή –1, β) Μέγιστη τιμή 5, γ) Μέγιστη τιμή 7 **3** x=1, x=–3 **4** Παρατηρήστε ότι ισχύει $y>0$ για κάθε τιμή του x **5** α) λ = 2, β) (–1, 0), (–2, 0), (0, 2) **6** 10 **7** Παρατηρήστε ότι $-\frac{β}{2}=4$ και $-7=4^2+4β+γ$, $β=-8$ και $γ=9$ **8** α) Παρατηρήστε ότι $-\frac{β}{2α}=20$ και τα σημεία (0, 0) και (20, 10) ανήκουν στην παραβολή, β) 7,5 m – N(10 , 7,5).

Γενικές ασκήσεις 4ου κεφαλαίου

1 $y=\pm\frac{2}{3}x^2$ **2** α = 0 **3** A(1, – 1), B(–3, –9) **4** $y=2x^2-8x+5$ **5** α) Παρατηρήστε ότι ΑΓ=10–x > 0, γ) Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, όταν x=y=5 cm
6 $E=(6-x)(3+x)$, x = 1,5 m **7** Αν ΑΜ = x, τότε $E=2x^2-20x+100$ – Στο μέσον του ΑΒ **8** α) Παρατηρήστε ότι $-\frac{β}{2α}=2$ και τα σημεία (0, 6), (2, 8) ανήκουν στην παραβολή, β) 4 m **9** α) Παρατηρήστε ότι $y=αx^2+6$ και το σημείο (8, 0) ανήκει στην παραβολή, β) Προσδιορίστε την τεταγμένη του σημείου που έχει τετμημένη 1,6 και θα βρείτε 5,76 m.

Κεφάλαιο 5ο

5.1 Σύνολα

1 α) Α = {–5, 5}, β) Β = {5}, γ) Γ = {–1, 0, 1, 2, 3, 4}, δ) Δ = {1, 2, 3, 4, 6, 12} **2** $A\subseteq K$, $Γ\subseteq K$, Α = Λ, Β = Μ **3** Α={1, 2, 3}. Υποσύνολα του Α είναι: {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {1, 3}, Α, ∅ **4** Α = {(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)} **5** α) Α = {περιττοί φυσικοί αριθμοί}, β) Β = {γράμματα της λέξης ιστορία}, γ) Γ = {ψηφία του αριθμού 20} **6** α) Α ∪ Β = {1, 2, 4, 5, 6}, β) Α ∩ Β = {2, 4}, γ) Α′={3, 6}, δ) Β′={1, 3, 5} **7** α) Α={α, λ, γ, ε, β, ρ}, Β = {φ, ρ, ε, γ, α, τ}, Γ = {ε, λ, α, φ, ι}, β) Β ∪ Γ = {φ, ρ, ε, γ, α, τ, λ, ι}, Α ∩ Β = {α, γ, ε, ρ}, Α ∩ Γ = {α, λ, ε}, γ) Α ∩ (Β ∪ Γ) = {α, λ, γ, ε, ρ} **8** α) Α ∩ Β, β) Α ∪ Β, γ) Α ∩ Β′, δ) Α′ ∩ Β′ **9** α) Είναι αθλητής του στίβου ή φοιτητής του Πανεπιστημίου, β) Είναι αθλητής του στίβου και φοιτητής του Πανεπιστημίου, γ) Δεν είναι αθλητής του στίβου, δ) Δεν είναι φοιτητής του Πανεπιστημίου, ε) Είναι αθλητής του στίβου και όχι φοιτητής του Πανεπιστημίου, στ) Δεν είναι αθλητής του στίβου αλλά είναι φοιτητής του Πανεπιστημίου, ζ) Δεν είναι ούτε αθλητής του στίβου ούτε φοιτητής του Πανεπιστημίου.

5.2 Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

1 Ω = {σπ, σλ, τπ, τλ, γπ, γλ} **2** Ω = {ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ} **3** ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΑ, ΒΓ, ΒΔ, ΓΑ, ΓΒ, ΓΔ, ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ **4** α) Ω = {Κ, Α, Μ}, β) Με τρεις το πολύ κινήσεις, γ) Με δύο κινήσεις **5** α) Ω = {ΔΕ, ΔΖ, ΔΣ, ΚΕ, ΚΖ, ΚΣ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΣ, ΠΕ, ΠΖ, ΠΣ}, β) Α = {ΔΕ, ΔΖ, ΚΕ, ΚΖ, ΜΕ, ΜΖ, ΠΕ, ΠΖ}, Β = {ΔΕ, ΔΖ, ΔΣ, ΚΕ, ΚΖ, ΚΣ, ΠΕ, ΠΖ, ΠΣ} **6** α) Α ∪ Β = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 9}, β) Α ∩ Β = {1, 3}, γ) Β′ = {6, 7, 8, 9} **7** α) {2642, 2672, 2842, 2872, 2942, 2972}, β) Α = {2672, 2872, 2972}, Β = {2642, 2672, 2842, 2872}.

5.3 Έννοια πιθανότητας

1 α) $\frac{6}{13}$, β) $\frac{3}{13}$ **2** 0,5% **3** $\frac{40}{52}$ **4** $P(A)=\frac{7}{20}$, $P(B)=\frac{15}{20}$, $P(Γ)=\frac{13}{20}$ **5** α) $\frac{3}{25}$, β) $\frac{8}{25}$, γ) $\frac{10}{25}$ δ) $\frac{3}{25}$
6 $\frac{2}{8}$ **7** $P(A)=\frac{1}{36}$, $P(B)=\frac{6}{36}$, $P(Γ)=\frac{11}{36}$ **8** $\frac{13}{25}$, $\frac{12}{24}$
9 $\frac{1}{4}$ ή 25% **10** $\frac{1}{10}$ **11** $\frac{1}{14}$ **12** 48% **13** $\frac{12}{24}$ ή 50%

Γενικές ασκήσεις 5ου κεφαλαίου

1 α) Ω = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, Α = {0, 2, 4, 6, 8}, Β={1, 2, 4, 8}, β) Α ∪ Β={0, 1, 2, 4, 6, 8}, Α ∩ Β = {2, 4, 8}, Α′ = {1, 3, 5, 7}, Β′ = {0, 3, 5, 6, 7}, γ) i) $P(A)=\frac{5}{9}$, ii) $P(B')=\frac{5}{9}$, iii) $P(A\cap B)=\frac{3}{9}$, iv) $P(A\cup B)=\frac{6}{9}$

2 $\frac{3}{12}$, $\frac{6}{8}$ **3** α) 1η γραμμή: 12, 36 - 2η γραμμή: 18, 14 β) i) $\frac{30}{80}$, ii) $\frac{32}{80}$, iii) $\frac{12}{80}$, iv) $\frac{68}{80}$ **4** $\frac{2}{12}$

5 $\frac{3}{4}$ ή 75% **6** α) $\frac{4}{12}$, β) $\frac{6}{12}$ **7** $\frac{2}{10}$ **8** Δεν είναι σωστός, αφού, $P(8)=\frac{5}{36}$ ενώ $P(7)=\frac{6}{36}$.

ΜΕΡΟΣ Β′ – ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Κεφάλαιο 1ο

1.1 Ισότητα τριγώνων

1 Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΕ (Π – Γ – Π) **2** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΑΣ, ΟΒΣ, (Π – Γ – Π) **3** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΕ (Π – Γ – Π) **4** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΑΔ, ΟΒΓ (Π – Γ – Π) **5** Τα τρίγωνα ΑΖΕ, ΒΔΖ, ΓΔΕ είναι ίσα (Π – Γ – Π) **6** Τα τρίγωνα ΒΓΔ, ΒΓΕ είναι ίσα (Π – Γ – Π) **7** Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ είναι ίσα (Γ – Π – Γ) **8** Να φέρετε μια διαγώνιο και να συγκρίνετε τα τρίγωνα που σχηματίζονται **9** α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ, Α′Β′Δ′ (Γ – Π – Γ), β) (Γ – Π – Γ) **10** (Π – Π – Π) **11** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΑΓ (Π – Π – Π) **12** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ (Π – Π – Π) **13** α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΜ, Α′Β′Μ′ (Π – Π – Π), β) (Π – Γ – Π) **14** α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΒΔΜ, ΓΕΜ (Π – Γ – Π), β) (Π – Π – Π) **15** Να συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΕ **16** Να συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ – Ιδιότητα της μεσοκαθέτου **17** Να συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΔ **18** Να φέρετε ΑΑ′ ⊥ ε, ΒΒ′ ⊥ ε και να συγκρίνετε τα τρίγωνα που σχηματίζονται **19** α) Να συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, Α′Β′Δ′, β) (Γ – Π – Γ) **20** Να συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΜ, ΟΓΝ **21** Να φέρετε τις χορδές ΒΓ, ΒΔ και να παρατηρήσετε ότι $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$.

1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

1 Να εφαρμόσετε το θεώρημα των ίσων τμημάτων μεταξύ παραλλήλων ευθειών **2** β) i) $\frac{2}{5}$, ii) 2, iii) $\frac{5}{6}$, iv) $\frac{3}{2}$, v) $\frac{1}{3}$ **3** α) 2, β) $\frac{\sqrt{5}}{2}$, γ) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **4** α) $\frac{3}{5}$, β) $\frac{4}{5}$, γ) $\frac{3}{4}$

5 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **6** α) Να εφαρμόσετε τη σχετική πρόταση που ισχύει σε τρίγωνο, β) Είναι $\frac{AB}{AE} = \frac{A\Gamma}{AM} = 2$ **7** Παρατηρήστε ότι ΒΜ, ΔΜ είναι διάμεσοι ορθογωνίων τριγώνων που αντιστοιχούν στην ίδια υποτείνουσα. **8** Να φέρετε από το μέσο της ΑΔ παράλληλη προς τις βάσεις του τραπεζίου.

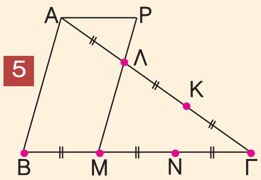
1.3 Θεώρημα Θαλή

1 ΒΖ=7 **2** ΒΖ=3,2, ΖΓ=4,8 **3** x=12 **4** ΟΓ=15, ΕΖ = 12 **5** x = 7,5 **6** ΟΚ = 15, ΚΓ = 9 **7** x = 10,8, y = 6 **8** Έπρεπε ΟΔ = 62 και ΟΓ =31 ώστε $\frac{OA}{OB} = \frac{O\Gamma}{O\Delta}$

1.4 Ομοιοθεσία

1 β) i) 1,5 cm ii) 6 cm **2** 6 cm, 8 cm, 10 cm **3** $\hat{A}' = 90^\circ$, $\hat{B}' = \hat{\Gamma}' = 45^\circ$ και Α′Β′ = Α′Γ′ = 6 cm, $B'\Gamma' = 6\sqrt{2}$ cm **4** Παρατηρήστε ότι ο ομοιόθετος κύκλος θα έχει τριπλάσια ακτίνα

5



6 Είναι ίσα **7** α) Α′(–2, 2), Β′(4, 4), Γ′(0, –4). Είναι διπλάσιες β) Α″(–3, 1), Β″(3, 3), Γ″(–1, –5). Όχι **8** Παρατηρήστε ότι το ΔΕ είναι ομοιόθετο του ΒΓ με κέντρο Α και λόγο $\frac{1}{3}$ **9** Παρατηρήστε ότι το κέντρο ομοιοθεσίας είναι το σημείο τομής των Α′Α, Β′Β και ο λόγος ομοιοθεσίας είναι $\frac{5}{2}$

1.5 Ομοιότητα

Α. Όμοια πολύγωνα

1 Στη β′ περίπτωση **2** α) x = 4,2 cm, β) x = 50° **3** Όχι. Δεν είναι οι πλευρές ανάλογες **4** Είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Κ και λόγο $\frac{1}{2}$ **5** α) ΑΕΚΗ ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Α και λόγο $\frac{1}{4}$, β) ΚΘΓΖ ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Γ και λόγο $\frac{3}{4}$, ΚΘΓΖ ≈ ΑΒΓΔ ≈ ΑΕΚΗ **6** 120 m, 1: 4000.

Β. Όμοια τρίγωνα

1 α) x = 6cm, β) x = 6cm, γ) x = 3cm **2** ΑΔ = 6 cm **3** α) Ισχύει $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma}$, β) Έχουν γωνίες ίσες **4** ΑΒ = 25 m **5** x = 4 **6** 21 m **7** x = 6cm **8** 1,70 m.

1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

1 $\frac{9}{25}$ **2** 50 cm² **3** 25 φορές **4** α) $\frac{1}{4}$, β) $\frac{1}{4}$ **5** Παρατηρήστε ότι $\frac{E_1}{E} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ και $\frac{E_2}{E} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ **6** α) $\frac{16}{9}$, β) $\frac{16}{25}$ **7** α) Το ΔΕΖ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓ με κέντρο Ο και λόγο $\frac{1}{2}$, β) Είναι $\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ **8** α) 57,6 cm², β) 22,5 cm² **9** 69% **10** 36%.

Γενικές ασκήσεις 1ου κεφαλαίου

1 Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΑΔ και ΕΑΓ είναι ίσα **2** α) Να συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΕ, β) Παρατηρήστε ότι $A\hat{\Delta}Z = E\hat{A}B$ **3** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΒΓΖ **4** Να συγκρίνετε κατ' αρχήν τα τρίγωνα ΒΓΜ, Β'Γ'Μ' **5** α) ΟΔ = 9,6 cm και ΟΕ = 12,8 cm **6** $6\sqrt{2}$ cm **7** 36 cm² **8** α) 2, β) 10 cm **9** 1 cm **10** α) Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα του Θαλή, β) Παρατηρήστε ότι (ΔΕΗΖ) = (ΑΒΓ)–(ΑΔΕ)–(ΒΔΖ)–(ΓΕΗ).

Κεφάλαιο 2ο

2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0° \leq \omega \leq 180°$

1 α) $ημω = \frac{4}{5}$, $συνω = \frac{3}{5}$, $εφω = \frac{4}{3}$, β) $ημω = \frac{12}{13}$, $συνω = -\frac{5}{13}$, $εφω = -\frac{12}{5}$, γ) ημω = 1, συνω = 0, εφω δεν ορίζεται **2** α) 2, β) $ημω = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $συνω = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, εφω = –2 **3** $Π(5\sqrt{3}, 5)$ **4** α) $Μ(-1, \sqrt{3})$, β) $ημ120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $συν120° = -\frac{1}{2}$, $εφ120° = -\sqrt{3}$ **5** α) Να φέρετε ΜΚ ⊥ x'x και παρατηρήστε ότι ΜΚ = 1, β) $ημ150° = \frac{1}{2}$, $συν150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $εφ150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ **6** α) $\frac{3}{4}$, β) $ημω = \frac{3}{5}$, $συνω = -\frac{4}{5}$ **7** Παρατηρήστε ότι $Σ_1(10, 7)$ και $Σ_2(20, 18)$, $Σ_1\hat{O}Σ_2 = 7°$.

2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

1 α) $ημ120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $συν120° = -\frac{1}{2}$, $εφ120° = -\sqrt{3}$, β) $ημ135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $συν135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, εφ135° = –1, γ) $ημ150° = \frac{1}{2}$, $συν150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $εφ150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

2 α) Παρατηρήστε ότι 108° + 72° = 180° και 77° + 103° = 180°, β) Παρατηρήστε ότι 122° + 58° = 180° **3** α), β) Να αντικαταστήσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τις τιμές τους **4** Παρατηρήστε ότι σε κάθε περίπτωση οι γωνίες είναι παραπληρωματικές **5** α) 45° ή 135°, β) 30° ή 150°, γ) 30°, δ) 120°, ε) 120°, στ) 45° **6** Παρατηρήστε ότι οι δύο γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες ή παραπληρωματικές – όχι **7** α), β) Παρατηρήστε ότι $\hat{A} + \hat{Γ} = 180°$ **8** $ημω = \frac{4}{5}$, $συνω = \frac{3}{5}$, $εφω = \frac{4}{3}$ και ω, φ παραπληρωματικές γωνίες **9** Να φέρετε το ύψος ΑΚ, $ημω = \frac{3\sqrt{21}}{14}$, $συνω = \frac{\sqrt{7}}{14}$, $εφω = 3\sqrt{3}$ και ω, φ παραπληρωματικές γωνίες.

2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

1 $συνω = \frac{12}{13}$, $εφω = \frac{5}{12}$ **2** $ημω = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $εφω = -2\sqrt{2}$ **3** $ημω = \frac{3}{5}$, $συνω = \frac{4}{5}$ **4** Α = 0 **5** Να βγάλετε κοινό παράγοντα α) το ημω, β) το συν²ω **6** α), β) Να αντικαταστήσετε τα x, y **7** α) Να αντικαταστήσετε το ημ²α με 1 – συν²α, β) Από τους δύο πρώτους όρους να βγάλετε κοινό παράγοντα το ημ²α **8** α), β) Να αναπτύξετε τις ταυτότητες **9** α) Παρατηρήστε ότι $εφ^2x = \frac{ημ^2x}{συν^2x}$, β) Να αντικαταστήσετε την εφx με $\frac{ημx}{συνx}$ **10** α) Παρατηρήστε ότι συν²x = 1 – ημ²x = (1 – ημx)(1 + ημx), β) Να χρησιμοποιή- σετε την ταυτότητα $εφx = \frac{ημx}{συνx}$ **11** α) 1, β) 2 **12** α) Παρατηρήστε ότι $εφ70° = \frac{ημ70°}{συν70°}$ και 70° + 110° = 180°, β) Παρατηρήστε ότι $εφ40° = \frac{ημ40°}{συν40°}$ και 40° + 140° = 180° **13** Να αντικαταστήσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών α = 30° και β = 60°.

Μαθηματικό αίνιγμα: Παρατηρήστε ότι $\left(\frac{λ+1}{λ+2}\right)^2 + \left(\frac{λ}{λ+2}\right)^2 = 1$, ω = 180°.

2.4 Νόμος των ημιτόνων – Νόμος των συνημιτόνων

1 α) $2\sqrt{2}$, β) $5\sqrt{6}$, γ) $4\sqrt{6}$ **2** α) 90°, β) 30°, γ) 90° **3** α) $\hat{A} = 45°$ και $\hat{B} = 105°$ ή $\hat{A} = 135°$ και $\hat{B} = 15°$, β) $\hat{B} = 45°$ και $\hat{A} = 75°$ **4** Να χρησιμοποιήσετε το νόμο των ημιτόνων **5** Περίπου 448 m **6** Από το νόμο των ημιτόνων προκύπτει $ημΑ = \sqrt{3}$ που είναι αδύνατο **7** $F_1 \approx 6{,}44$ N και $F_2 \approx 5{,}27$ N **8** 29,06 m **9** α) 5, β) 120°, γ) 2, δ) x = 90° **10** β = γ = 3 **11** $10\sqrt{3}$ cm **12** $ΑΓ = \sqrt{13}$, $ΒΔ = \sqrt{37}$ **13** Είχε δίκιο. Να χρησιμοποιήσετε το νόμο των συνημιτόνων. Το μήκος της σήραγγας ήταν 157,19 m **14** 126°.

Γενικές ασκήσεις 2ου κεφαλαίου

1 α) Να κάνετε τις πράξεις σε κάθε μέλος, β) Να κάνετε ομώνυμα τα κλάσματα στο 1ο μέλος **2** $συνω = -\frac{5}{13}$ και ΑΜ = 15 **3** Είναι $Α\hat{Δ}Γ = Α\hat{Γ}Δ$. Είναι $ΑΔ = 10\sqrt{6}$ cm. **4** α) β) Να χρησιμοποιήσετε το νόμο των ημιτόνων, γ) Παρατηρήστε ότι ημφ = ημω **5** β) $\hat{A} = 120°$, $(ΑΒΓ) = 60\sqrt{3}$ m² **6** α) Να χρησιμοποιήσετε το νόμο των ημιτόνων, β) Είναι ημ(Β + Γ) = συν(Β – Γ) = 1 **7** α) Να χρησιμοποιήσετε το νόμο των ημιτόνων, β), γ), δ) Να χρησιμοποιήσετε το νόμο των συνημιτόνων **8** Είναι α = 6, β = 5, γ = 4 ή α = 5, β = 6, γ = 4 **9** Περίπου 65 m.